

### EXERCICE 1

Une chaîne de magasins de prêt à porter a adopté en fonction du succès ou de l'échec d'un type de vêtement mis en vente, la stratégie commerciale suivante :

- En cas de succès du modèle vendu on conserve le même modèle le mois suivant. Il a alors une probabilité 0,5 de se retrouver en situation d'échec.
  - En cas d'échec on change de modèle le mois suivant en adoptant une politique commerciale plus agressive (prix plus ajusté, publicité etc). Il a alors une probabilité 0,6 d'avoir du succès.
1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste à deux états.
  2. On suppose qu'en cas de succès d'un modèle, l'entreprise gagne 12€ par article et qu'en cas d'échec, elle perd 1,20€ par article.
    - a) En cas de succès d'un modèle, quel est le gain moyen sur ce modèle un mois plus tard?
    - b) Quel est le montant du gain moyen que cette entreprise peut espérer réaliser sur le long terme?

### EXERCICE 2

1. Représenter le graphe probabiliste à trois états  $\{A, B, C\}$  dont la matrice de transition associée est  $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ,  
les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.
2. On note  $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$  la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape  $n$ .  
On suppose que  $P_0 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}\right)$ . Calculer  $P_1$  et  $P_3$
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système.

### EXERCICE 3

Un opérateur de téléphonie mobile propose à ses abonnés deux forfaits :

- une formule A qui donne droit à deux heures de communication mensuelle;
- une formule B qui donne droit à un nombre illimité de communications mensuelles.

On admet que d'une année sur l'autre, le nombre de clients de cet opérateur est stable et que :

- 20% des clients ayant choisi la formule B changent de formule;
- 30% des clients ayant choisi la formule A changent de formule.

En 2016, 80% des clients de cet opérateur étaient abonnés à la formule A.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste de sommets A et B et donner sa matrice de transition.
2. Pour un entier naturel  $n$  donné, on note  $P_n = (a_n \quad b_n)$  avec  $a_n + b_n = 1$ , la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors de l'année 2016 +  $n$ . L'état probabiliste initial est donc  $P_0 = (0,8 \quad 0,2)$ .
  - a) Calculer la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A en 2017.
  - b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$ .
3. On pose pour tout entier  $n$ ,  $u_n = a_n - 0,4$ .
  - a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 0,5.
  - b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que, pour tout entier naturel  $n$  :  $a_n = 0,4 \times (1 + 0,5^n)$
  - c) Déduire de ce qui précède, la limite de la suite  $(a_n)$ . Donner une interprétation concrète de ce résultat.
  - d) À partir de quelle année, la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A sera-t-elle inférieure à 0,401?

### EXERCICE 4

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.

Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B.

Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le  $n$ -ième mois après l'étude et  $P_n = (a_n \quad b_n)$  la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le  $n$ -ième mois après l'étude. Ainsi,  $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$ .

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets  $A$  et  $B$ .
2. a) Écrire la matrice de transition  $M$  de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.  
b) Montrer que la matrice ligne  $P_2$  est égale à  $(0,564 \quad 0,436)$ .
3. Soit  $P = (a \quad b)$  la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que  $P = P \times M$ . Déterminer les réels  $a$  et  $b$ . Interpréter ce résultat.
4. À l'aide de la relation  $P_{n+1} = P_n \times M$ , démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$ .
5. On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = a_n - 0,6$ .
  - a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $0,6$ .
  - b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que  $a_n = -0,1 \times 0,6^n + 0,6$ .
  - c) À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement  $A$  est-elle supérieure à  $0,595$ ?

### EXERCICE 5

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.

Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs. On trouve ceux qui ont une opinion favorable ( $F$ ), ceux qui sont neutres ( $N$ ) et ceux qui ont une opinion négative ( $R$ ). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

- 28% des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10% une opinion négative ;
- Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif ;
- 70% des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets  $F$ ,  $N$  et  $R$ .

2. On note  $M$  la matrice de transition associée à ce graphe. Compléter  $M = \begin{pmatrix} \dots & 0,28 & 0,1 \\ 0,32 & \dots & 0,1 \\ \dots & \dots & 0,7 \end{pmatrix}$ .

3. L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.

L'état probabiliste de la semaine  $n$  est défini par la matrice ligne  $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ , où  $a_n$  désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine  $n$ ,  $b_n$  la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine  $n$  et  $c_n$  la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine  $n$ .

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a  $P_0 = (0 \quad 1 \quad 0)$ .

- a) Montrer que l'état probabiliste une semaine après le début de la campagne est  $P_1 = (0,32 \quad 0,58 \quad 0,1)$ .
- b) Déterminer l'état probabiliste  $P_3$ . Interpréter ce résultat.
- c) Déterminer l'état probabiliste stable du système.
- d) En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire?

### EXERCICE 6

Un industriel décide de modifier l'emballage d'un de ses produits.

On note  $A$  le conditionnement actuel du produit et  $B$  le nouveau conditionnement.

À partir des études réalisées au préalable, la direction commerciale estime que 28 % des consommateurs choisissant le conditionnement  $A$  et 12 % des consommateurs choisissant le conditionnement  $B$  changent d'avis d'un mois sur l'autre.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  et  $b_n$  les probabilités qu'un consommateur choisisse respectivement le conditionnement  $A$  et le conditionnement  $B$  le  $n$ -ième mois après la mise sur le marché du conditionnement  $B$  et  $P_n = (a_n \quad b_n)$  la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le  $n$ -ième mois après la mise sur le marché du nouveau conditionnement. Ainsi,  $P_0 = (1 \quad 0)$ .

### PARTIE A

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets  $A$  et  $B$ .
2. a) Donner la matrice de transition  $M$  de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

- b) Calculer la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement  $B$  deux mois après sa mise sur le marché.
3. On note  $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$  l'état stable associé à ce graphe.  
Déterminer les réels  $a$  et  $b$ . Interpréter ce résultat.

**PARTIE B**

L'industriel décide de ne plus proposer le conditionnement  $A$  à partir du mois où il prévoit que moins de 32 % des consommateurs choisiront ce conditionnement.

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,12$ .
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour calculer le nombre de mois au bout duquel le conditionnement  $A$  sera retiré du marché.

```

A ← 1
N ← 0
Tant que .....
    A ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
    
```

3. Pour tout nombre entier naturel  $n$ , on définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = a_n - 0,3$ .
  - a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a :  $a_n = 0,7 \times 0,6^n + 0,3$ .
4. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation  $0,7 \times 0,6^n + 0,3 \leq 0,32$ .  
En déduire au bout de combien de mois, le conditionnement  $A$  sera retiré du marché.

**EXERCICE 7**

Après avoir effectué quelques parties au jeu « 2048 » Léa a constaté que :

- quand elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,64.
- quand elle a perdue, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,14.

On note  $G$  l'état : « Léa a gagné la partie » et  $P$  l'état : « Léa a perdu la partie ».

Pour un jour donné, on note également pour tout entier naturel  $n$  :

- $g_n$  la probabilité que Léa gagne la  $n$ -ième partie;
- $p_n$  la probabilité que Léa perde la  $n$ -ième partie;
- $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$  la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du  $n$ -ième partie.

On suppose que la veille du jour considéré, Léa avait gagné sa dernière partie, on a donc  $g_0 = 1$  et  $E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste.  
b) Préciser la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe.  
c) Calculer la probabilité que Léa gagne sa troisième partie.  
d) Déterminer l'état stable du graphe probabiliste.
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,14$ .
3. On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier  $n$ , par  $u_n = g_n - 0,28$ .
  - a) Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
  - b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $g_n = 0,72 \times 0,5^n + 0,28$ .
4. À partir de combien de parties dans la journée la probabilité que Léa gagne sa partie sera-t-elle strictement inférieure à 0,3?

**EXERCICE 8**

(D'après sujet bac Polynésie 2015)

**PARTIE A**

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.

Le tableau 1 indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le tableau 2 indique le coût horaire par poste de travail.



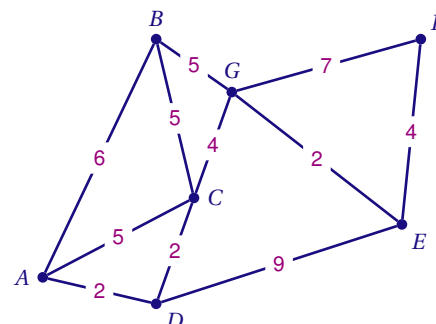
1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et P où le sommet A représente l'état « un habitant est abonné » et P l'état « un habitant n'est pas abonné ».
2. Déterminer la matrice de transition  $T$  de ce graphe en respectant l'ordre A puis P des sommets.
3. Déterminer  $R_1$ .
4. Déterminer l'état probabiliste en 2021.  
Les résultats seront arrondis au millième.
5. On admet qu'il existe un état stable  $(x \ y)$ .
  - a) Justifier que  $x$  et  $y$  sont solutions du système : 
$$\begin{cases} -7x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
.
  - b) Déterminer l'état stable de ce graphe.

**PARTIE B**

Le responsable du service de location souhaite vérifier l'état des pistes cyclables reliant les parkings à vélos de location disposés dans la ville.

On modélise la disposition des lieux par le graphe étiqueté ci-contre dont les sommets représentent les parkings à vélo.

Les poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, pour se rendre d'un parking à l'autre en suivant la piste cyclable.



1. Le responsable peut-il planifier un parcours partant de son bureau situé en A jusqu'à la mairie située en F en passant par toutes les pistes cyclables sans emprunter deux fois le même chemin?
2. Le responsable est pressé. Déterminer le parcours le plus rapide possible permettant d'aller de A à F.

**EXERCICE 10**

(D'après sujet bac Amérique du Sud 2017)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

**PARTIE A**

Pour les déplacements entre les principales villes d'une région, les habitants peuvent acquérir soit la carte d'abonnement bus (PassBus), soit la carte d'abonnement train (PassTrain), toutes les deux étant valables un an.

Une étude récente montre que le nombre global d'abonnements reste constant dans le temps et que, chaque année, la répartition des abonnements évolue de la manière suivante :

- 10 % des abonnements PassBus sont remplacés par des abonnements PassTrain ;
- 15 % des abonnements PassTrain sont remplacés par des abonnements PassBus.

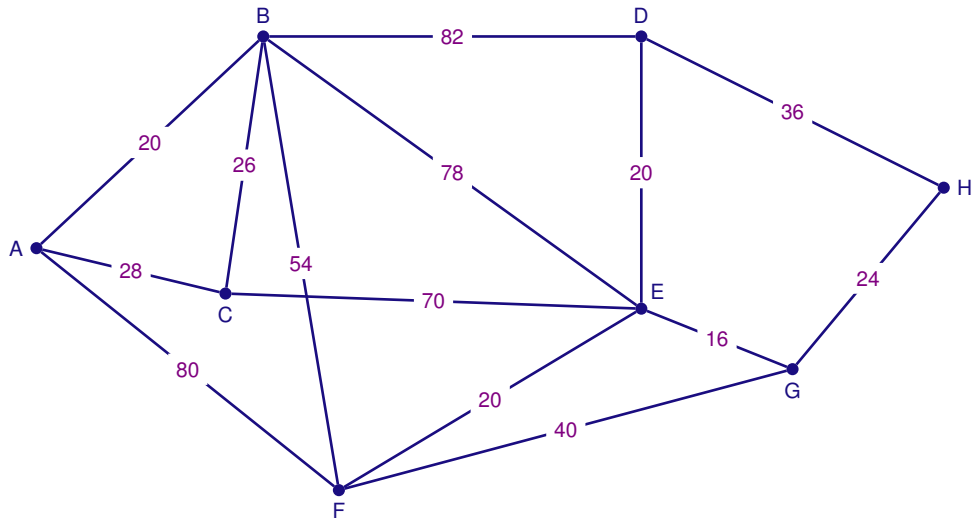
1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et T où le sommet B représente l'état « abonné PassBus » et T l'état « abonné PassTrain ».
2. Déterminer la matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre B, T des sommets.
3. En 2016, les abonnements PassBus représentaient 25 % de l'ensemble des abonnements, tandis que les abonnements PassTrain en représentaient 75 %.  
Quelle sera la part, en 2019, des abonnements PassBus dans l'ensemble des abonnements?  
Donner le résultat en pourcentage arrondi à 0,1 %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

**PARTIE B**

Le réseau ferroviaire de la région est schématisé par le graphe ci-dessous.

Les sommets représentent les villes et les arêtes représentent les voies ferrées.

Sur les arêtes du graphe sont indiquées les distances exprimées en kilomètre entre les villes de la région.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour aller de la ville A à la ville H. Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.