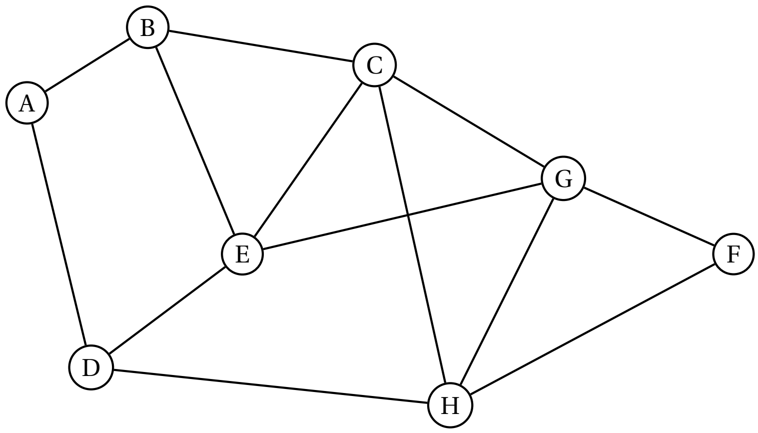
Devoir Surveillé n°2
Correction
Terminale ES Spé
Graphes et Dijkstra
Durée 1 heure - Coeff. 3
Noté sur 20 points

Exercice 1. La campagne électorale — 15 points



Partie A

1. Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :

1. a. complet ;

- Un graphe simple est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête. Ici le graphe $\mathcal{G}$ est sans boucle et deux arêtes ne relient jamais les mêmes paires de sommets, donc le graphe $\mathcal{G}$ est simple.
- Un graphe simple est dit complet si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.

Le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas complet car par exemple les sommets A et E ne sont pas reliés par une arête.

1. b. connexe.
Un graphe est dit connexe si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.
Dans le graphe proposé, la chaîne $ABCEDHGF$ par exemple passe par tous les sommets du graphe, donc le graphe $\mathcal{G}$ est connexe .

2.

2. a. Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.
Citons le théorème d'Euler

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse [Leonhard d'Euler](#) (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	2	3	4	3	4	2	4	4

Donc deux sommets sont de degré impair, les sommets B et D. Par conséquent, d'après le théorème 1, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne.
Il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.

2. b. Citer un trajet de ce type.
Le nombre de sommets de degré impair est 2 : ce sont les sommets B et C. D'après le théorème d'Euler, le graphe $\mathcal{G}$ admet donc une chaîne eulérienne. Les extrémités de la chaîne sont les sommets de degré impair, soit B et D.
Pour déterminer une telle chaîne, on applique l'algorithme d'Euler et on trouve par exemple, par étapes successives :

- **Étape 1 :** **B-A-D** (recherche d'une chaîne d'extrémités B et D)
- **Étape 2 :** on insère le cycle **B-E-G-C-B** à la place de B dans la chaîne précédente.
  On obtient **B-E-G-C-B -A-D**
- **Étape 3 :** on insère le cycle **C-E-D-H-C** à la place de C dans la chaîne précédente.
  On obtient **B-E-G-C-E-D-H-C-B -A-D**
- **Étape 4 :** on insère le cycle **G-H-F-G** à la place de G dans la chaîne précédente.
  On obtient **B-E-G-H-F-G-C-E-D-H-C-B -A-D**
- **Étape 5 :** toutes les arêtes du graphe ont été utilisées. Une chaîne eulérienne possible est donc :

$$\boxed{\textbf{B-E-G-H-F-G-C-E-D-H-C-B -A-D}}$$

3. On appelle M la matrice adjacente au graphe $\mathcal{G}$, les sommets pris dans l'ordre alphabétique.

3. a. Déterminer la matrice M.
M la matrice adjacente au graphe $\mathcal{G}$ est :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. b. On donne la matrice M^3. Justifier le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H. Préciser ces chemins.
Le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H est donnée par le terme $a_{58} = 4 = a_{85}$ de la matrice symétrique réelle M^3.
Il existe donc 4 trajets de longueur 3 reliant E à H :

$$\boxed{\textbf{E-G-F-H ; E-C-G-H ; E-B-C-H ; E-G-C-H}}$$

Partie B

Déterminer en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F. Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.

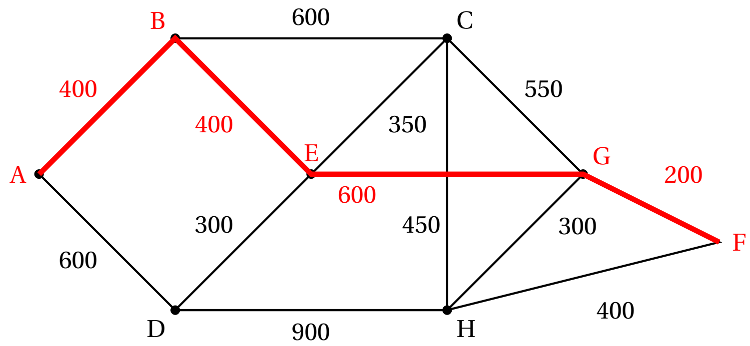
On utilise l'algorithme de Dijkstra.

de .. à	à B	à C	à D	à E	à G	à H	à F
A	$\boxed{\textbf{400A}}$	∞	600A	∞	∞	∞	∞
B(400A)	-	$400+600=$ 1 000B	$\boxed{\textbf{600A}}$	$400+400=$ 800B	∞	∞	∞
D(600A)	-	1 000B	-	~~(900D)~~ $\boxed{\textbf{800B}}$	∞	1 500D	∞
E(800B)	-	~~(1 150E)~~ $\boxed{\textbf{1 000B}}$	-	-	1 400E	1 500D	∞
C(1 000B)	-	-	-	-	~~(1 550C)~~ $\boxed{\textbf{1 400E}}$	1 450C	∞
G(1 400E)	-	-	-	-	-	~~(1 700G)~~ $\boxed{\textbf{1 450C}}$	1 600G
H(1 450C)	-	-	-	-	-	-	$\boxed{\textbf{1 600G}}$
F(1 600G)	-	-	-	-	-	-	-

Le plus cours trajet est :

$$A \xrightarrow{400} B \xrightarrow{400} E \xrightarrow{600} G \xrightarrow{200} F$$

Il est d'une longueur de 1 600 km.



Remarque : L'*algorithme de Dijkstra* porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002). Il a été publié en 1959.

Fin du devoir