Devoir Surveillé n°1
Correction

Terminale ES Spé

Matrices

Durée 1 heure - Coeff. 3
Noté sur 20 points

Exercice 1. Matrice et suites — 11 points

On considère les matrices : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. [1 pt] Calculer D^2 et D^3.

$$\boxed{D^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{D^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

2. [1 pt] On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

En notant $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ on a :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}+\frac{4}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} & \frac{4}{5}+\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Donc $P \times Q = Id$, cela implique par théorème que $Q \times P = Id$, et donc Q est la matrice inverse de la matrice P.

3. [2 pts] Soit A la matrice telle que $A = P \times D \times P^{-1}$. Montrer par le calcul que : $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$P \times D \times P^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$P \times D \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Donc :

$$\boxed{A = P \times D \times P^{-1}}$$

4. [1 pt] Montrer que $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$.

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(P \times D \times P^{-1}\right)\left(P \times D \times P^{-1}\right)\\
A^2 &= P \times D \times \underbrace{P^{-1} \times P}_{Id} \times D \times P^{-1}\\
A^2 &= P \times \underbrace{D \times Id \times D}_{D^2} \times P^{-1}\\
A^2 &= \underline{P \times D^2 \times P^{-1}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}}$$

Partie B

On considère la suite (u_n) *définie pour tout entier n par :* $u_0 = 2\,;\ u_1 = 1\,;\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}\,u_{n+1} + u_n$.

1. Pour tout entier n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a. [1 pt] Donner V_0 et V_1.

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{V_0 = \begin{pmatrix} u_1 = 1 \\ u_0 = 2 \end{pmatrix}}.$
- $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \dfrac{3}{2}\,u_1 + u_0 = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{V_1 = \begin{pmatrix} u_2 = \dfrac{7}{2} \\ u_1 = 1 \end{pmatrix}}.$

1. b. [2 pts] Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$.

Pour tout entier n :

- D'une part on a : $V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
- D'autre part on a :

$$A \times V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}\,u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc pour tout entier n on a :

$$\boxed{V_{n+1} = A \times V_n}$$

2. On admet que pour tout entier n : $V_n = A^n \times V_0$ où $\begin{cases} A^n = P \times D^n \times P^{-1} \\ D^n = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{cases}$.

2. a. [2 pts] Calculer V_6.

$$\boxed{V_6 = A^6 \times V_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{3277}{64} & \dfrac{819}{32} \\ \dfrac{819}{32} & \dfrac{205}{16} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6553}{64} = u_7 \\ \dfrac{1639}{32} = u_6 \end{pmatrix}}$$

2. b. En déduire les valeurs de u_6 et u_7.

$$\boxed{u_7 = \frac{6553}{64}} \text{ et } \boxed{u_6 = \frac{1639}{32}}$$

Exercice 2. 9 points

Un constructeur d'ordinateurs portables fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.

- *Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les ordinateurs*
- *et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.*

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	16 h	20 h	28 h
Modèle 2	12 h	12 h	20 h
Modèle 3	24 h	20 h	36 h

Tableau 2	
Poste 1	12 €/h
Poste 2	10 €/h
Poste 3	7 €/h

1. Soit H et C les deux matrices suivantes :

$$H = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 28 \\ 12 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 36 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. a. [1 pt] Donner la matrice produit : $P = H \times C$

$$\boxed{P = H \times C = \begin{pmatrix} 588 \\ 404 \\ 740 \end{pmatrix}}$$

1. b. [1 pt] Que représentent les coefficients de la matrice P ?

La matrice C est celle de coûts horaires par poste et H celle des heures par poste et par modèle.
Les coefficients de la matrice $P = H \times C$ correspondent donc aux prix de revient des différents modèles d'ordinateurs.

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :
<u>Modèle 1</u> : 488 € ; <u>Modèle 2</u> : 336 € ; <u>Modèle 3</u> : 616 €.

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

2. a. [1.5 pt] Montrer que les réels a, b et c doivent vérifier l'égalité : $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$.

On a montré lors de la question **1b.** que les coefficients de la matrice $P = H \times C$ correspondent aux prix de revient des différents modèles de planches de surf.

Or ici la matrice de coûts horaires par poste devient $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et celle des prix de revient par modèle $P = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$.

La matrice H restant inchangée, les prix de revient par modèle sont déterminés par :

$$H \times C = P$$

Les réels a, b et c doivent être solutions du système :

$$\boxed{H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}}$$

2. b. [1.5 pt] Montrer rapidement (sans détailler tous les calculs) que la matrice inverse de la matrice H est :

$$\boldsymbol{H^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

En notant $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$ on obtient :

$$H \times X = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 28 \\ 12 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 36 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

Donc $HX = Id$ et comme cela implique aussi que $XH = Id$, la matrice X est bien l'inverse de H.

2. c. [3 + 1 = 4 pts] En déduire les réels a, b et c. Interpréter le résultat.

Puisque la matrice H est inversible on a :

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix} \iff \underbrace{H^{-1} \times H}_{Id} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$$

$$\iff Id \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Donc les nouveaux coûts horaires sont pour chaque poste de :

<u>Poste 1</u> : 10 € ; <u>Poste 2</u> : 8 € ; <u>Poste 3</u> : 6 €.

Fin du devoir

Bonus

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$.

$$T^2 = Id \iff \begin{pmatrix} a^2 - b & ab - 2b \\ 2 - a & 4 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}}$$