Système de numération et base

1 Notre système de numération

Notre système de numération est un système décimal de position. Il est constitué de 10 chiffres dont la position indique le nombre d'unités de la puissance de 10 correspondante.

$$3405 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Il a fallu attendre le XIIe siècle pour que ce système inventé en Inde arrive en occident.

2 Notion de base

Définition 1 : Dans un système de position en base b, on note un nombre N par $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{\,b}$. Ce nombre N s'écrit dans notre système décimal de position par :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{\,n} = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \dots + a_1 \times b^1 + a_n \times b^0$$

Avec a_n, a_{n-1},... a_0 des chiffres strictement inférieur à b. En base b, il ne peut y avoir que b chiffres

2.1 Conversion de la base b vers la base 10

- En base 2, il n'y a que 2 chiffres : 0 et 1

$$\begin{aligned} \overline{110111}^{\,2} &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1 = 55 \end{aligned}$$

- En base 5, il y a 5 chiffres : 0, 1, 2, 3 et 4

$$\begin{aligned} \overline{231}^{\,5} &= 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 1 \times 5^0 \\ &= 2 \times 25 + 3 \times 5 + 1 = 50 + 15 + 1 = 66 \end{aligned}$$

- En base 12, il y a douze chiffres. Comme nous n'avons que 10 chiffres dans notre système décimal, on prend souvent pour les deux derniers chiffres α pour le chiffre 10 et β pour le chiffre 11. Les douze chiffres sont donc : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α et β.

$$\begin{aligned} \overline{1\alpha6}^{\,12} &= 1 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 6 \times 12^0 \\ &= 144 + 120 + 6 = 270 \end{aligned}$$

Algorithme : On peut proposer l'algorithme suivant pour transformer un nombre de la base b vers la base décimale.

On rentre Q le nombre écrit en base B. On initialise le nombre N en base 10 à zéro ainsi que le compteur I.
La fonction E() correspond à la partie entière.
Comme la calculette ne comprend que la base 10, on détecte les différents chiffres de Q en effectuant des divisions successives par 10 et en retenant le reste que l'on multiplie par la puissance de B correspondante

Exemple : Si $Q = \overline{2013}^7$ et $B = 7$, on obtient alors $N = 696$

Malheureusement, ce programme ne peut fonctionner avec une base supérieure à 10 qui possèdent des chiffres (α, β,...). La seule méthode serait de rentrer les chiffres de Q dans une liste. Je laisse le lecteur me proposer un tel programme.

Variables : Q, B, N, I, R entiers
Entrées et initialisation
  Lire Q, B
  $0 \to N$
  $0 \to I$
Traitement
  tant que $Q > 0$ **faire**
    $Q - 10 \times \mathrm{E}\left(\dfrac{Q}{10}\right) \to R$
    $\mathrm{E}\left(\dfrac{Q}{10}\right) \to Q$
    $N + R \times B^I \to N$
    $I + 1 \to I$
  fin
Sorties : Afficher N

2.2 Conversion de la base 10 vers la base b

Propriété 1 : Pour déterminer l'écriture d'un nombre dans notre système de numération dans un système en base b, on effectue des divisions successives de ce nombre par b. On obtient le nombre en base b, on prenant le dernier quotient et en remontant tous les restes de ces divisions.

- Donner l'écriture de 496 en base 7

$$\begin{array}{r|l} 496 & 7 \\ \hline 6 & 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 7 \\ \hline 0 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

$$496 = 1 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 6 \times 7^0 = \overline{1\,306}^7$$

- Donner l'écriture de 2 278 en base 12

$$\begin{array}{r|l} 2278 & 12 \\ \hline 107 & 189 \\ 118 & \\ 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 189 & 12 \\ \hline 69 & 15 \\ 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 12 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

$$2\,278 = 1 \times 12^3 + 3 \times 12^2 + 9 \times 12^1 + 10(\alpha) \times 12^0 = \overline{1\,39\alpha}^{12}$$

- Donner l'écriture de 149 en base 2.

  On utilise ici un procédé un peu différent car le nombre de divisions par 2 devient vite assez important. On connaît les puissances de 2 :
  1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, ...
  On effectue alors des soustractions successives de puissance de 2. On a alors :

$$\begin{aligned} 149 &= 1 \times 128 + 1 \times 16 + 1 \times 4 + 1 \\ &= 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= \overline{10\,010\,001}^2 \end{aligned}$$

Algorithme : On peut proposer l'algorithme suivant pour transformer un nombre de la base décimale vers la base b

On rentre N le nombre écrit en base décimale et la base b. On initialise le nombre Q en base b à zéro ainsi que le compteur I.
La fonction E() correspond à la partie entière.
Comme la calculette ne comprend que la base 10, on multiplie les différents chiffres de Q par les puissances de 10 correspondantes
Exemple : Si $N = 2013$ et $B = 5$, on obtient alors $N = \overline{31\,023}^5$
Malheureusement, ce programme ne peut fonctionner avec une base supérieure à 10 qui possèdent des chiffres (α, β,...). La seule méthode serait de rentrer les chiffres de Q dans une liste. Je laisse le lecteur me proposer un tel programme.

Variables : N, B, Q, I, R entiers
Entrées et initialisation
  Lire N, B
  $0 \to Q$
  $0 \to I$
Traitement
  tant que $N > 0$ **faire**
    $N - B \times \mathrm{E}\left(\dfrac{N}{B}\right) \to R$
    $\mathrm{E}\left(\dfrac{N}{B}\right) \to N$
    $Q + R \times 10^I \to Q$
    $I + 1 \to I$
  fin
Sorties : Afficher Q