Correction contrôle de mathématiques

Du vendredi 02 février 2018

Exercice 1

ROC **(4 points)**

1) a) Théorème de Gauss : « Soit trois entiers relatifs non nuls a, b, c. Si a divise le produit bc et si a est premier avec b alors a divise c. »

Corollaire : « Si b et c divisent a et si b est premier avec c alors le produit bc divise a ».

b) a est premier avec b, donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entier relatif (u, v) tel que : $au + bv = 1$ (1).
On multiplie cette égalité (1) par c : $acu + bcv = c$ (2).
Or a divise bc donc il existe un entier relatif k tel que $bc = ka$.
En remplaçant dans l'égalité (2), on a : $acu + kav = c \Leftrightarrow a(cu + kv) = c$.
On en déduit alors que a divise c.

2) Application : $21a - 5b = 0 \Leftrightarrow 21a = 5b$ (E).

5 divise $21a$, or $\text{pgcd}(5, 21) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise a.
Il existe un entier relatif k tel que : $a = 5k$.
En remplaçant dans (E), on obtient : $21(5k) = 5b \Leftrightarrow b = 21k$.

L'ensemble des couples qui vérifient (E) sont de la forme : $\begin{cases} a = 5k \\ b = 21k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercice 2

Applications du cours **(4 points)**

1) On a les divisions successives :

$$\begin{cases} 1505 = 903 \times 1 + 602 \\ 903 = 602 \times 1 + 301 \\ 602 = 301 \times 2 \end{cases} \Rightarrow \text{pgcd}(1505, 903) = 301.$$

2) $5a - 14b = 5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 70n + 15 - 70n - 14 = 1$.

Il existe donc une combinaison linéaire de a et de b égale à 1, donc d'après le théorème de Bézout, les entiers a et b sont premiers entre eux.

3) Faux, l'identité de Bézout n'est qu'une implication.

Contre exemple : $8 \times 1 + 5 \times (-1) = 3$, donc il existe une combinaison linéaire de 8 et de 5 égale à 3 bien que $\text{pgcd}(8, 5) = 1$.

4) On a les divisions successives :

$$\begin{cases} 51 = 9 \times 5 + 6 \\ 9 = 6 \times 1 + 3 \\ 6 = 3 \times 2 \end{cases} \Rightarrow \text{pgcd}(51, 9) = 3.$$

D'après le corollaire du théorème de Bézout, une équation de la forme $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple de $\text{pgcd}(a, b)$. Or 2 n'est pas un multiple de 3 donc l'équation $51x + 9y = 2$ n'admet pas de solutions entières.

EXERCICE 3

Équation diophantienne **(5 points)**

1) a) 25 et 7 sont premiers entre eux donc 210 est un multiple de pgcd(25,7), on en déduit d'après le corollaire du théorème de Bézout, que l'équation $25x + 7y = 210$ admet des solutions entières.

b) $(2, -7)$ est une solution particulière de (E') car $25 \times 2 + 7(-7) = 50 - 49 = 1$.

En multipliant ce couple par 210, on trouve $(420, -1470)$ qui est solution de (E).

2) Soit (x, y) une solution quelconque de (E) : on a alors : $\begin{cases} 25x + 7y = 210 \\ 25(420) + 7(-1470) = 210 \end{cases}$.

En soustrayant termes à termes, on trouve :
$25(x - 420) + 7(y + 1470) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25(x - 420) = 7(-y - 1470)$ (E_1).

7 divise $25(x-450)$, or $\text{pgcd}(25, 7) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise $(x - 420)$.
Il existe un entier relatif k tel que : $x - 420 = 7k$.
En remplaçant dans (E_1), on obtient : $-y - 1470 = 25k$.

L'ensemble des couples solution de (E) sont de la forme : $\begin{cases} x = 420 + 7k \\ y = -1470 - 25k \end{cases}$

3) Soit x et y le nombre respectifs d'adultes et d'enfants. On a alors : $25x + 7y = 210$.

Sachant que x et y sont strictement positifs et de la forme de la question 2), on a :

$$\begin{cases} 420 + 7k > 0 \\ -1470 - 25k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7k > -420 \\ -25k > 1470 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -60 \\ k < -\dfrac{294}{5} \ (= 58,8) \end{cases} \Leftrightarrow \quad -59 \leqslant k \leqslant -59$$

On en déduit que $k = -59$ et que $\begin{cases} x = 420 - 7 \times 59 = 7 \\ y = -1470 + 25 \times 59 = 5 \end{cases}$

Il y a donc 7 adultes et 5 enfants dans le groupe.

EXERCICE 4

Suite géométrique **(4 points)**

1) Si a, b, c, d, e sont en progression géométrique de raison q, alors

$$b = qa \ , \ c = q^2a \ , \ d = q^3a \ , \ e = q^4a$$

$6a^2 = e - b \quad \Leftrightarrow \quad 6a^2 = aq^4 - aq \quad \Leftrightarrow \quad 6a^2 = aq(q^3 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 6a = q(q^3 - 1)$.

2) q divise $6a$, or $\text{pgcd}(q, a) = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, q divise 6.

Comme $q > 1$ les valeurs possibles pour q sont 2,3 et 6.

- $q = 2$ alors $6a = 2(8 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 6a = 14$ impossible.
- $q = 3$ alors $6a = 3(27 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 6a = 78 \quad \Leftrightarrow \quad a = 13$ premier avec 3.
- $q = 6$ alors $6a = 6(216 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad a = 215$ premier avec 6.

Les valeurs possibles pour q sont donc 3 et 6.

3) Les valeurs de a, b, c, d et e sont :
13, 39, 117, 351 et 1 053 ou 215, 1 290, 7 740, 46 440 et 278 640.

EXERCICE 5

Système **(3 points)**

1) Si n est solution de (S) alors $\begin{cases} n \equiv 1\ (5) \\ n \equiv 3\ (4) \end{cases} \overset{-11}{\Leftrightarrow} \begin{cases} n - 11 \equiv -10\ (5) \\ n - 11 \equiv -8\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - 11 \equiv 0\ (5) \\ n - 11 \equiv 0\ (4) \end{cases}$

   $n - 11$ est donc divisible par 4 et 5.

2) 4 et 5 divisent $(n - 11)$ et $\text{pgcd}(4, 5) = 1$, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $4 \times 5 = 20$ divise $(n - 11)$.

   Les solutions sont de la forme : $n = 11 + 20k,\ k \in \mathbb{Z}$.