Correction contrôle de mathématiques

Du vendredi 01 décembre 2017

Exercice 1

ROC et application **(6 points)**

1) ROC

   a) Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$.

   b) Sens direct : a et b sont premiers entre eux, d'après l'identité de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$.

   Réciproquement : on a $au + bv = 1$. Soit $D = \text{pgcd}(a, b)$. D est un diviseur de a et de b donc il divise toute combinaison linéaire de a et de b, il divise donc $au + bv = 1$. En conséquence $D = 1$.

2) Application :

   a) D'après le théorème de Pythagore : $y^2 = x^2 + (x+1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$.

   b) $y^2 = 2(x^2 + x) + 1$. On en déduit que y^2 est impair.
   Comme un nombre et son carré ont même parité, si y^2 est impair alors y est impair également.

   c) On met en évidence une combinaison linéaire égale à 1 :

$$y^2 - 2x(x+1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (-x-1)x + (y)y = 1$$

   Il existe donc une combinaison linéaire de x et de y égale à 1. D'après le théorème de Bézout les entiers naturels x et y sont premiers entre eux.

Exercice 2

pgcd **(4 points)**

1) On a les divisions successives suivantes :

$$\begin{aligned} 1\,386 &= 546 \times 2 + 294 \\ 546 &= 294 \times 1 + 252 \\ 294 &= 252 \times 1 + 42 \\ 252 &= 42 \times 6 \end{aligned} \qquad \text{pgcd}(1\,386\,;\,546) = 42$$

2) On cherche une combinaison linéaire de a et b égale à 1 :

$$-7a + 4b = -7(4k+5) + 4(7k+9) = -28k - 35 + 28k + 36 = 1$$

   Il existe donc une combinaison linéaire de a et de b égale à 1. D'après le théorème de Bézout, les nombres a et b sont premiers pour tout entier relatif k.

3) Soit b cet entier. On divise 1 854 et 3 175 par b, on obtient alors :

$$\exists\,(q, q') \in \mathbb{N}^2, \ \begin{cases} 1\,854 = bq + 9 \ \text{ avec } b > 9 \\ 3\,175 = bq' + 10 \ \text{ avec } b > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\,845 = bq \\ 3\,165 = bq' \end{cases} \text{avec } b > 10$$

   b est un diviseur commun de 1 845 et de 3 165 supérieur à 10. D'après l'identité de Bézout, b est un diviseur du $\text{pgcd}(1\,845, 3\,165)$ supérieur à 10.

   Calculons le $\text{pgcd}(1\,845, 3\,165)$ par l'algorithme d'Euclide :

$3\,165 = 1\,845 \times 1 + 1320$
$1\,845 = 1\,320 \times 1 + 525$
$1\,320 = 525 \times 2 + 270$
$525 = 270 \times 1 + 255$
$270 = 255 \times 1 + 15$
$255 = 15 \times 17$

$\text{pgcd}(1\,845\ ;\ 3\,165) = 15$

$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$

Le seul diviseur de 15 supérieur à 10 est 15 donc $b = 15$.

EXERCICE 3

Fraction entière **(3 points)**

1) Faisons la division euclidienne de b par a.

$$\begin{array}{r|l} n^2 + n + 3 & n-2 \\ \cline{2-2} -n^2 + 2n & n+3 \\ \cline{1-1} 0n^2 + 3n + 3 & \\ -3n + 6 & \\ \cline{1-1} 0n + 9 & \end{array}$$

On a alors : $b = a(n+3) + 9$

Soient $D = \text{pgcd}(a, b)$ et $d = \text{pgcd}(a, 9)$. Par double inégalité :

- D divise a et b, donc D divise toute combinaison linéaire de a et de b donc divise $-(n+3)a + b = 9$. Comme D divise a et 9, on a $D \leqslant d$.
- d divise a et 9, donc d divise toute combinaison linéaire de a et de 9 donc divise $(n+3)a + 9 = b$. Comme d divise a et b, on a $d \leqslant D$.
- $D \leqslant d$ et $d \leqslant D$ donc $D = d$.

2) La fraction est entière si $(n-2)$ divise $(n^2 + n + 3)$ donc si $\text{pgcd}(a, b) = a$.

D'après 1), $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, 9) = a$. Donc a est un diviseur de 9.

$n-2$	-9	-3	-1	1	3	9
n	-7	-1	1	3	5	11

EXERCICE 4

Congruence **(4 points)**

1) On divise 2018 par 7 : $2018 = 7 \times 288 + 2$ donc $2018 \equiv 2\ (7) \overset{\uparrow 2018}{\Leftrightarrow} 2018^{2018} \equiv 2^{2018}\ (7)$

or $2^3 \equiv 8 \equiv 1\ (7)$ et $2018 = 3 \times 672 + 2$ donc : $2^{2018} \equiv (2^3)^{672} \times 2^2 \overset{2^3 \equiv 1}{\equiv} 2^2 \equiv 4\ (7)$.

Le reste de la division de 2018^{2018} par 7 est 4.

2) a) On a le tableau de congruence suivant :

$x \equiv\ (5)$	0	1	2	3	4
$3x^2 \equiv\ (5)$	0	3	2	2	3
$4x - 4 \equiv\ (5)$	1	0	4	3	2
$3x^2 + 4x - 4 \equiv\ (5)$	1	3	1	0	0

b) L'équation (E) admet comme solutions : $x \equiv 3\ (5)$ et $x \equiv 4\ (5)$

EXERCICE 5

Suites et pgcd **(3 points)**

1) **Initialisation :** $n = 0$, on a : $2u_0 - 3v_0 = 2 - 3 = -1 = (-1)^{0+1}$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$, montrons que $2u_{n+1} - 3v_{n+1} = (-1)^{n+2}$

$$\begin{aligned} 2u_{n+1} - 3v_{n+1} &= 2(2u_n + 3v_n) - 3(2u_n + v_n) = 4u_n + 6v_n - 6u_n - 3v_n = -2u_n + 3v_n = -(2u_n - 3v_n) \\ &\overset{\text{HR}}{=} -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$

2)
- Si n impair, alors $(n + 1)$ pair, on a : $2u_n - 3v_n = 1$.
- Si n pair, alors $(n + 1)$ impair, on a : $2u_n - 3v_n = -1 \Leftrightarrow -2u_n + 3v_n = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a trouvé une combinaison linéaire de u_n et de v_n égale à 1, d'après le théorème de Bézout, $\operatorname{pgcd}(u_n, v_n) = 1$