Contrôle de mathématiques
Vendredi 02 février 2018

Exercice 1

ROC **(4 points)**

1) a) Citer le théorème de Gauss ainsi que son corollaire.

   b) On donne le théorème de Bézout : « soit deux entiers relatifs non nuls a et b. Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$ ».
   Démontrer le théorème de Gauss à l'aide du théorème de Bézout.

2) Application : déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (a, b) tels que : $21a - 5b = 0$

Exercice 2

Applications du cours **(4 points)**

1) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le pgcd de 903 et 1 505.

2) Soient les entiers $a = 14n + 3$ et $b = 5n + 1$. Montrer que a et b sont premiers entre eux pour tout entier relatif n.

3) Peut-on affirmer :
   « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 3$ alors $\text{pgcd}(a, b) = 3$ » ?
   On se justifiera.

4) L'équation $51x + 9y = 2$ admet-elle des solutions entières.
   On se justifiera et on citera le théorème utilisé.

Exercice 3

Équation diophantienne **(5 points)**

Soit l'équation (E) : $25x + 7y = 210$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) a) Montrer que l'équation (E) admets des solutions.

   b) Déterminer une solution particulière de l'équation (E') : $25x + 7y = 1$. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

2) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de l'équation (E).

3) On sait que la somme à régler au restaurant pour un groupe d'adultes et d'enfants est de 210 €. Sachant que le menu adulte est à 25 € et le menu enfant à 7 €, déterminer le nombre d'adultes et d'enfants de ce groupe.

Exercice 4

Suite géométrique **(4 points)**

Cinq entiers naturels a, b, c, d, e sont cinq termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q > 1$ et telle que q est premier avec a. On sait de plus que $6a^2 = e - b$.

1) Montrer que : $6a = q(q^3 - 1)$.

2) Montrer que q divise 6 puis déterminer les valeurs possibles pour q.

3) En déduire les valeurs de a, b, c, d et e.

EXERCICE 5

Système **(3 points)**

On considère le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 1\ (5) \\ n \equiv 3\ (4) \end{cases}$ d'inconnue n entier relatif.

1) Montrer que si n est solution de (S) alors $(n - 11)$ est divisible par 4 et par 5.

2) En déduire l'ensemble des solutions n du système (S).