Contrôle de mathématiques

Vendredi 01 décembre 2017

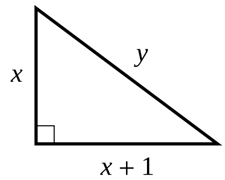
EXERCICE 1

ROC et application **(6 points)**

1) ROC
   a) Énoncer le théorème de Bézout.
   b) On donne l'identité de Bézout : « Soit deux entiers a et b non nuls et $D = \text{pgcd}(a, b)$. Il existe alors un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = D$ »
   Démontrer le théorème de Bézout à l'aide de l'identité de Bézout.

2) Application :

   On appelle triangle rectangle presque isocèle, le triangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur respectivement x et $x + 1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels non nuls.



   a) Montrer que x et y vérifient l'équation : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
   b) Montrer que y est impair.
   c) Montrer que x et y sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

pgcd **(4 points)**

1) Déterminer $\text{pgcd}(1386, 546)$ par l'algorithme d'Euclide.

2) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On définit deux entiers a et b par $a = 4k + 5$ et $b = 7k + 9$.
   Montrer que pour tout entier relatif k, les entiers a et b sont premiers entre eux.

3) Si l'on divise 1 854 et 3 175 par un même entier positif, on obtient respectivement 9 et 10 comme reste. Quel est cet entier ?

EXERCICE 3

Fraction entière **(3 points)**

Soit n un entier relatif. On pose : $a = n - 2$ et $b = n^2 + n + 3$

1) Démontrer que : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, 9)$.

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, la fraction $\dfrac{n^2 + n + 3}{n - 2}$ est-elle un entier relatif ?

EXERCICE 4

Congruence **(4 points)**

1) Quelle est le reste de la division de 2018^{2018} par 7 ?

2) On veut connaître les solutions de l'équation (E) : $3x^2 + 4x - 4 \equiv 0 \pmod 5$

a) **Recopier** puis remplir le tableau de congruence suivant :

$x \equiv \quad (5)$	0	1	2	3	4
$3x^2 \equiv \quad (5)$					
$4x - 4 \equiv \quad (5)$					
$3x^2 + 4x - 4 \equiv \quad (5)$					

b) Quels sont les solutions que l'équation (E) ?

EXERCICE 5

Suites et pgcd **(3 points)**

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n$$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$

2) En déduire la valeur de $\text{pgcd}(u_n, v_n)$.