Contrôle de mathématiques

Jeudi 24 novembre 2016

EXERCICE 1

Algorithme d'Euclide **(4 points)**

1) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd des nombres suivants :

   a) 2 012 et 7 545 b) 1 386 et 546

2) En divisant 1 809 et 2 527 par un même entier naturel, les restes sont respectivement 9 et 7.
   Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir comme diviseur ?

EXERCICE 2

Théorème de Bézout **(7 points)**

1) a) Énoncer le théorème de Bézout.

   b) On donne l'identité de Bézout : « Soit deux entiers a et b non nuls et D leur pgcd. Il existe alors un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = D$ »
   Démontrer le théorème de Bézout à l'aide de l'identité de Bézout.

2) Soit n un entier naturel, $a = 7n + 4$ et $b = 5n + 3$.
   Montrer que a et b sont premiers entre eux pour tout n.

3) Démontrer que pour tout entier relatif n, les entiers $(14n + 3)$ et $(5n + 1)$ sont premiers entre eux. En déduire pgcd(87, 31)

4) a) Montrer par l'algorithme d'Euclide que 23 et 13 sont premiers entre eux.

   b) En remontant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution de l'équation $23x+13y = 1$

EXERCICE 3

Solution d'une équation diophantienne **(3 points)**

1) Énoncer le corollaire du théorème de Bézout.

2) Applications :

   a) L'équation $12x + 4y = 3$ admet-elle des solutions entières ?

   b) L'équation $221x + 338y = 26$ admet-elle des solutions entières ?

EXERCICE 4

Vrai-faux **(6 points)**

On donne trois propositions. Dites si elles sont vraies ou fausses puis justifier votre réponse. Une réponse sans justification ne rapporte aucun point.

a) **Proposition 1 :** Le reste de la division de 2009^{8001} par 16 est 1.

b) **Proposition 2 :** Le reste de la division de 11^{2001} par 7 est 1.

c) **Proposition 3 :** $2x^2 + x - 1 \equiv 0\ (5)$ si, et seulement si, $x \equiv 3\ (5)$