Correction contrôle de mathématiques

Mardi 06 janvier 2015

EXERCICE 1

ROC et questions de cours **(6 points)**

1) a) **Théorème de Bézout :** « Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$ »

b) Il suffit de trouver une combinaison linéaire de a et b judicieuse pour éliminer n :

$$(9)a + (-2)b = 18n + 9 - 18n - 8 = 1$$

Il existe donc un couple $(9 ; -2)$ tel que $9a - 2b = 1$ d'après le théorème de Bézout, les nombres a et b sont premiers entre eux, pour tous n

2) a) **Théorème de Gauss :** « Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c. »

Démonstration :

- Si a divise le produit bc, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $bc = ka$
- Si a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$

En multipliant par c, on a : $acu + bcv = c$ or $bc = ka$, donc : $acu + kav = c$ soit $a(cu + kv) = c$. Donc a divise c.

b) Soit (E) : $4x = 7(y - 1)$

- 7 divise $4x$ or $\text{pgcd}(7; 4) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise x. On a donc : $x = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$
- En remplaçant $x = 7k$ dans (E), on a : $y - 1 = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$ soit $y = 1 + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Comme $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donc $7k \geqslant 0$ et $1 + 4k \geqslant 0$ soit $k \geqslant 0$

L'ensemble des couples d'entiers naturels $(x ; y)$ solutions de (E) sont du type :

$$\begin{cases} x = 7k \\ y = 1 + 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

3) a) **Corollaire du théorème de Bézout :** « L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple du $\text{pgcd}(a, b)$. »

b) D'après ce corollaire :

- (E_1) : $14x + 35y = 5$ n'admet pas de solution entière car $\text{pgcd}(14, 35) = 7$ et 5 non multiple de 7.
- (E_2) : $7x - 13y = 4$ admet des solutions entières car $\text{pgcd}(7; 13) = 1$ et 4 est un multiple de 1

EXERCICE 2

Application du cours **(4 points)**

1) On a :

$$\begin{aligned} 1\,064 &= 700 \times 1 + 364 \\ 700 &= 364 \times 1 + 336 \\ 364 &= 336 \times 1 + 28 \\ 336 &= 28 \times 12 \qquad \text{pgcd}(1\,064; 700) = 28 \end{aligned}$$

On a alors : $\text{ppcm}(1\,064; 700) = \dfrac{1\,064 \times 700}{28} = 26\,600$

2) a) Soit d le pgcd(a ; b). d divise a et b donc d divise $5a - 3b = 15n + 5 - 15n + 3 = 8$.
d est donc un diviseur de 8.

b) Si $d = 8$ alors a et b sont multiples de 8. En utilisant les congruences, on a :

- $3n + 1 \equiv 0 \pmod 8 \Leftrightarrow 3n \equiv -1 \pmod 8$.
  En multipliant par 3 on a $9n \equiv -3 \pmod 8 \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod 8$
- $5n - 1 \equiv 0 \pmod 8 \Leftrightarrow 5n \equiv 1 \pmod 8$.
  En multipliant par 5 on a $25n \equiv 5 \pmod 8 \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod 8$

On a donc $d = 8 \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod 8$

EXERCICE 3

Algorithme et équation diophantienne **(7 points)**

1) On entre $A = 12$ et $B = 14$. On obtient le tableau suivant :

A	B	D
12	14	2
2	12	10
10	2	8
8	10	2
2	8	6
6	2	4
4	6	2
2	4	2
2	2	0

Le résultat est la dernière valeur de A soit 2.

2) Comme pgcd(a , b) = pgcd($|b - a|$, a), cet algorithme donne la valeur du pgcd(a , b)

3) a) $331 = 221 \times 1 + 110$ (1) et $221 = 110 \times 2 + 1$ (2)
D'après l'algorithme d'Euclide, 221 et 331 sont premier entre eux.

b) De (2) $110 \times 2 = 221 - 1$, en remplaçant dans (1)
On multiplie (1) par 2 : $331 \times 2 = 221 \times 2 + 221 - 1 \Leftrightarrow 221 \times 3 - 331 \times 2 = 1$

(3 ; 2) est solution de (E).

c) En soustrayant l'équation de la solution générale à l'équation de la solution particulière, on trouve :

$$\begin{cases} 221x - 331y = 1 \\ 221(3) - 331(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow 221(x-3) - 331(y-2) = 0$$

On obtient alors $221(x - 3) = 331(y - 2)$ (E').

331 divise $221(x - 3)$, comme 331 et 221 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 331 divise $(x - 3)$. On a alors : $x - 3 = 331k$, $k \in \mathbb{Z}$

En remplaçant dans (E'), on trouve $y - 2 = 221k$

En isolant x et y, on obtient l'ensemble des couples solution (x, y) :

$$\begin{cases} x = 3 + 331k \\ y = 2 + 221k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

4) a) La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 331$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Donc $v_n = v_0 + nr = 3 + 331n$

b) $u_p = u_q \iff 2 + 221p = 3 + 331q \iff 221p - 331q = 1$. $(p\ ,\ q)$ est solution de (E).

$0 \leqslant p \leqslant 500$ et $0 \leqslant q \leqslant 500 \Rightarrow k \in \{0, 1\}$

- Si $k = 0$ $p = 3$ et $q = 2$
- Si $k = 1$ $p = 334$ et $q = 223$

Exercice 4

Équation **(3 points)**

1) On a $x = dx'$ et $y = dy'$ avec $\text{pgcd}(x'\ ,\ y') = 1$. On a alors $m = dx'y'$

2) $m - 9d = 13 \iff d(x'y' - 9) = 13$
d divise 13 et 13 n'a que deux diviseurs 1 et 13, donc $d \in \{1\ ,\ 13\}$

- $d = 1 \Rightarrow x'y' - 9 = 13 \iff x'y' = 22$
  $D_{22} = \{1, 2, 11, 22\}$ On obtient le tableau solution suivant :

$x' = x$	1	2	11	22
$y' = y$	22	11	2	1

- $d = 13 \Rightarrow x'y' - 9 = 1 \iff x'y' = 10$
  $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$ On obtient le tableau solution suivant :

x'	1	2	5	10
y'	10	5	2	1

x	13	26	65	130
y	130	65	26	13