Contrôle de mathématiques

Correction du Lundi 06 décembre 2010

Exercice 1

Question de cours. (2 points)

Énoncer puis démontrer le théorème de Gauss.

Voir le cours

Exercice 2

PGCD et PPCM. (4,5 points)

1) Avec l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de 2010 et 5159.

On obtient les divisions suivantes :

$$\begin{aligned} 5159 &= 2010 \times 2 + 1139 \\ 2010 &= 1139 \times 1 + 871 \\ 1139 &= 871 \times 1 + 268 \\ 871 &= 268 \times 3 + 67 \\ 268 &= 67 \times 4 \end{aligned}$$

On en déduit que : $\text{PGCD}(2010, 5159) = 67$

2) Démontrer que pour tout entier relatif k , $14k + 3$ et $5k + 1$ sont premier entre eux.

Calculons la quantité suivante :

$$5(14k + 3) + (-14)(5k + 1) = 70k + 15 - 70k - 14 = 1$$

D'après le théorème de Bezout, $14k + 3$ et $5k + 1$ sont premier entre eux.

3) Deux entiers positifs ont pour PGCD 6 et pour PPCM 102. Déterminer ces entiers.

Soit x et y, $x < y$, les entiers positifs. On pose $d = \text{PGCD}(x, y)$ et $M = \text{PPCM}(x, y)$. On a alors :

$$x = dx' \quad y = dy' \quad \text{avec} \quad \text{PGCD}(x', y') = 1 \quad \text{et} \quad M = dx'y'$$

En remplaçant, on trouve :

$$102 = 6x'y' \quad \Leftrightarrow \quad x'y' = 17$$

or 17 n'a que deux diviseurs 1 et 17, donc $x' = 1$ et $y' = 17$ qui sont premiers entre eux. Les deux entiers sont donc $x = 6$ et $y = 6 \times 17 = 102$.

4) Existe-t-il des couples d'entiers (x, y) solution de l'équation $51x + 39y = 1$? Vous citerez le théorème utilisé.

Calculons le PGCD(51,39) par l'algorithme d'Euclide :

$$51 = 39 \times 1 + 12$$
$$39 = 12 \times 3 + 3$$
$$12 = 3 \times 4$$

Donc le $\text{PGCD}(51, 39) = 3$. De plus le corollaire de Bezout nous dit que : l'équation $ax + by = c$ admet des solutions entière si et seulement si c est un multiple du $\text{PGCD}(a, b)$. Or 1 n'est pas un multiple de 3, donc l'équation $51x + 39y = 1$ n'admet pas de solution entière.

Exercice 3

Vrai - Faux (4 points)

Pour chacune des 4 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Proposition vraie : en effet, on a $(-2)n + (1)(2n + 1) = 1$, donc d'après le théorème de Bezout, les entiers naturels n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Proposition 2 : L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples de la forme $(4 + 10k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition fausse : il existe des solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ qui ne sont pas de la forme $(4 + 10k; 9 + 24k)$. Par exemple $(9, 21)$ est solution de l'équation : $12 \times 9 - 5 \times 21 = 108 - 105 = 3$ et n'est pas de la forme $(4 + 10k; 9 + 24k)$.

Proposition 3 : Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et $4n + 3$ est égal à 7.

Proposition vraie : Soit $d = \text{PGCD}(3n + 4, 4n + 3)$, donc d divise $3n + 4$ et $4n + 3$ donc d divise $4(3n + 4) - 3(4n + 3) = 7$

De plus si $n \equiv 1 \mod 7$, d'après la compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication, on a :

$$3n + 4 \equiv 3 + 4 \mod 7 \quad \text{donc} \quad 3n + 4 \equiv 0 \mod 7 \quad \text{et}$$
$$4n + 3 \equiv 4 + 3 \mod 7 \quad \text{donc} \quad 3n + 4 \equiv 0 \mod 7$$

Les entiers $3n+4$ et $4n+3$ sont donc divisible par 7 et comme d divise 7, on a $d = 7$

Proposition 4 : S'il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2.

Proposition fausse : en effet 5 et 7 sont premiers entre eux et $(-1) \times 5 + (1) \times 7 = 2$

Exercice 4

PGCD (2,5 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n.$$

1) Montrer que $2n + 1$ divise a et b.

   On obtient par factorisation :

$$a = (2n + 1)(n + 1)^2 \quad \text{et} \quad b = n(2n + 1)$$

   ce qui prouve que $2n + 1$ divise a et b.

2) Montrer que le PGCD de a et b est $2n + 1$.
   Comme $2n + 1$ divise a et b, on a :

$$\text{PGCD}(a, b) = (2n + 1)\text{PGCD}((n + 1)^2, n)$$

   or $1 \times (n + 1)^2 + (-n - 2) \times n = 1$, donc d'après le théorème de Bezout $(n + 1)^2$ et n sont premiers entre eux et donc $\text{PGCD}(a, b) = 2n + 1$.

Exercice 5

Pompon et manège (7 points)

1) On considère l'équation $(E) \quad : \quad 17x - 24y = 9$ où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

   a) Vérifier que le couple $(9\ ;\ 6)$ est solution de l'équation (E).

   On a $17 \times 9 - 24 \times 6 = 153 - 144 = 9$, donc le couple $(9; -6)$ vérifie l'équation (E).

   b) Résoudre l'équation (E).

   On a :

$$\begin{cases} 17x - 24y = 9 \\ 17 \times 9 - 24 \times 6 = 9 \end{cases}$$

   on déduit par différence : $17(x - 9) - 24(y - 6) = 0 \;\Leftrightarrow\; 17(x - 9) = 24(y - 6) \quad (1)$.

   Donc 24 divise $17(x - 9)$, mais étant premier avec 17, d'après le théorème de Gauss, divise $x - 9$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 9 = 24k$

   En reportant dans (1), on obtient : $y - 6 = 17k$.

   L'ensemble des couples solutions de l'équation (E) est donc :

$$\begin{cases} x = 9 + 24k \\ y = 6 + 17k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) a) Montrer que $(x,\ y)$ est solution de l'équation (E) de la question 1)

   Jean a effectué y tours avant d'attraper le pompon à l'instant t et le pompon x tours. Pour le pompon $t = 17x$, et comme Jean met $\dfrac{3}{8} \times 24 = 9$ secondes pour aller de H à A, alors pour lui $t = 9 + 24y$, soit en égalant :

$$17x = 9 + 24y \;\Leftrightarrow\; 17x - 24y = 9,\; x \in \mathbb{N},\; y \in \mathbb{N}$$

   Le couple $(x\ ;\ y)$ doit donc être une solution de l'équation résolue à la question 1)

b) Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

D'après l'ensemble des solutions, le plus petit couple de nombres positifs vérifiant cette équation est le couple $(9; 6)$. Donc le temps nécesaire à Jean pour attraper le pompon est $t = 17 \times 9 = 153$ secondes soit 2 minutes et 33 secondes.
En deux minutes Jean n'a pas le temps d'attraper le pompom.

c) Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.
En raisonnant comme au a)

- Si Jean attrape le pompon au point B, on doit avoir en égalisant les deux temps

$$\frac{17}{4} + 17x = \frac{5}{8} \times 24 + 24y \Leftrightarrow 17 + 68x = 60 + 96y \Leftrightarrow 68x - 96y = 43$$

Or le PGCD de 68 et 96 est 4 qui ne divise pas 43, donc cette équation n'a pas de solutions entières.

- Si Jean attrape le pompon au point C, on doit avoir en égalisant les deux temps

$$\frac{17}{2} + 17x = \frac{7}{8} \times 24 + 24y \Leftrightarrow 17 + 34x = 42 + 48y \Leftrightarrow 34x - 48y = 25$$

Le PGCD de 34 et 48 est 2 qui ne divise pas 25, donc cette équation n'a pas de solutions entières.

- Si Jean attrape le pompon au point D, on doit avoir en égalisant les deux temps

$$\frac{17 \times 3}{4} + 17x = \frac{1}{8} \times 24 + 24y \Leftrightarrow 51 + 68x = 12 + 96y \Leftrightarrow 68x - 96y = -39$$

Le PGCD de 68 et 96 est 4 qui ne divise pas 39, donc cette équation n'a pas de solutions entières.

Conclusion : Jean ne peut attraper le pompon qu'au point A.

d) Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

Si Jean part de E, on a toujours $t = 17x$ et pour Jean $t = \frac{1}{8} \times 24 + 24y = 3 + 24y$, d'où

$$17x = 3 + 24y \Leftrightarrow 17x - 24y = 3$$

Or $17 \times 3 - 24 \times 2 = 3$, donc le couple $(3\ ;\ 2)$ est solution de cette équation.

Le temps nécessaire à Jean pour attraper le pompon est $t = 17 \times 3 = 51$ secondes qui sont bien inférieures aux deux minutes payées.