

Contrôle de mathématiques

Mardi 17 décembre 2013

EXERCICE 1

ROC et questions de cours

6 points

- 1) a) Citer le théorème de Bezout.
b) Montrer que quelque soit l'entier naturel n , les nombres $a = 9n + 5$ et $b = 7n + 4$ sont premiers entre eux.
- 2) a) Citer puis démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.
b) Trouver tous les couples entiers naturels $(x; y)$ tels que : $3(x - 1) = 5y$
- 3) a) Citer le corollaire du théorème de Bezout.
b) L'équation $9x - 6y = 2$ admet-elle des solutions entières ?
Même question avec $5x + 7y = 4$?

EXERCICE 2

Application du cours

4 points

- 1) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le pgcd de 4 935 et 517. En déduire le ppcm de 4 935 et 517.
- 2) Peut-on affirmer : « s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 3$ alors le pgcd de a et b est égal à 3 ». On se justifiera.
- 3) On considère l'équation $(E) : x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.
Peut-on affirmer : « il existe deux entiers naturels non nuls dont le pgcd et le ppcm sont solutions de l'équation (E) . » On se justifiera.

EXERCICE 3

Équation diophantienne

4 points

- 1) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ de nombres entiers relatifs, solution de l'équation :

$$(E) : 8x - 5y = 3$$

- 2) Soit m un nombre entier relatifs tel qu'il existe un couple $(p; q)$ de nombres entiers vérifiant :
 $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) .
- 3) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000

EXERCICE 4

Théorème chinois

6 points

On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{S} des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 13 [19] \\ n \equiv 6 [12] \end{cases}$$

1) Recherche d'un élément de \mathcal{S} .

On désigne par (u, v) un couple d'entiers relatifs tel que $19u + 12v = 1$.

- a) Justifier l'existence d'un tel couple (u, v) .
- b) On pose $n_0 = 6 \times 19u + 13 \times 12v$.
Démontrer que n_0 appartient à \mathcal{S} .
- c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à \mathcal{S} .

2) Caractérisation des éléments de \mathcal{S}

- a) Soit n un entier relatif appartenant à \mathcal{S} .
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 [228]$.
- b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à \mathcal{S} si et seulement si n peut s'écrire sous la forme $n = -6 + 228k$ où k est un entier relatif.

3) **Application** : La comète A passe tous les 19 ans et apparaîtra la prochaine fois, dans 13 ans.
La comète B passe, elle, tous les 12 ans et apparaîtra la prochaine fois, dans 6 ans.
Dans combien d'années pourra-t-on observer les deux comètes la même année ?