Contrôle de mathématiques

Mardi 06 décembre 2011

Exercice 1

Question de cours. (3 points)

Pré-requis : Soit a et b deux entiers non nuls et $D = \text{pgcd}(a, b)$
Il existe alors un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que :

$$au + bv = D$$

1) Citer le corollaire de Bezout
2) Démontrer ce théorème à l'aide du pré-requis ci-dessus.
3) L'équation $6x + 3y = 1$ admet-elle des solutions entières ?
Même question avec $7x + 5y = 1$?

Exercice 2

pgcd et ppcm. (3 points)

1) Avec l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de 2012 et 7545.
2) Démontrer que pour tout entier relatif k , $7k + 3$ et $2k + 1$ sont premier entre eux.
3) Deux entiers positifs ont pour PGCD 12 et pour PPCM 156. Déterminer ces entiers.

Exercice 3

Vrai - Faux (5 points)

Pour chacune des 4 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) **Proposition 1 :** Pour tout entier naturel n non nul, $3n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2) On appelle S l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.
Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k - 1; 3k - 1)$ où k est un entier relatif. »
3) Soient a et b deux entiers naturels.
Proposition 3 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».
4) On considère l'équation (E) : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.
Proposition 4 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E). »

Exercice 4

Nouvelle-calédonie dec 2007 (partiel) (4 points)

1) Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a) Montrer que l'équation (E) n'a pas de solution.

$$(E) \qquad 65x - 40y = 1$$

b) Montrer que l'équation (E') admet au moins une solution.

$$(E') \qquad 17x - 40y = 1$$

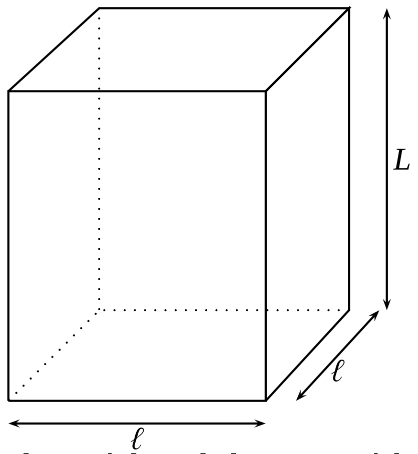
c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d) Résoudre l'équation (E').
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que
$17x_0 \equiv 1 \quad [40]$.

2) Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b \quad [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 \quad [55]$, alors $b^{33} \equiv a \quad [55]$.

Exercice 5

Antille Guyane juin 2001 (5 points + 1 point bonus)



1) Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté ℓ, où ℓ et L sont des entiers naturels non nuls tels que $\ell < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2) On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1** (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?
Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b) **(bonus + 1 points)** Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
Quelles sont les dimensions ℓ et L de la boîte B ?