Contrôle de mathématiques

Lundi 06 décembre 2010

Exercice 1

Question de cours. (2 points)

Énoncer puis démontrer le théorème de Gauss.

On pourra utiliser le théorème suivant :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$

Exercice 2

PGCD et PPCM. (4,5 points)

1) Avec l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de 2010 et 5159.
2) Démontrer que pour tout entier relatif k , $14k + 3$ et $5k + 1$ sont premier entre eux.
3) Deux entiers positifs ont pour PGCD 6 et pour PPCM 102. Déterminer ces entiers.
4) Existe-t-il des couples d'entiers (x, y) solution de l'équation $51x + 39y = 1$? Vous citerez le théorème utilisé.

Exercice 3

Vrai - Faux (4 points)

Pour chacune des 4 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Proposition 2 : L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples de la forme $(4 + 10k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3 : Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et $4n + 3$ est égal à 7.

Proposition 4 : S'il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2.

Exercice 4

PGCD (2,5 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n.$$

1) Montrer que $2n + 1$ divise a et b.
2) Montrer que le PGCD de a et b est $2n + 1$.
   On rappelle que pour tout entier naturel k non nul, on a $\text{PGCD}(ka, kb) = k\text{PGCD}(a, b)$.

Exercice 5

Pompon et manège (7 points)

1) On considère l'équation $(E)\quad : \quad 17x - 24y = 9$ où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   a) Vérifier que le couple $(9\ ;\ 6)$ est solution de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
2) Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma ci-dessous. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.
   Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.
   Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.
   À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.
   a) On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x,\ y)$ est solution de l'équation (E) de la question 1)
   b) Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?
   c) Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.
      Aide : On pourra montrer que si l'on attrape le pompon respectivement au point B, C et D, le couple (x, y) doit vérifier respectivement les équations suivantes :
      $68x - 96y = 43 \quad , \quad 34x - 48y = 25 \quad , \quad 68x - 96y = -39$
   d) Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?