Correction contrôle de mathématiques
Du jeudi 11 mai 2017

EXERCICE 1

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs, (E) : $7x - 3y = 1$.

1) On trouve l'algorithme complété suivant : on trouve les couples $(-2\,;-5)$, $(1\,;2)$; $(4\,;9)$

```
Variables : X, Y  nombres entiers
Traitement
    pour X variant de −5 à 10 faire
        pour Y variant de −5 à 10 faire
            si 7X − 3Y = 1 alors
                Afficher X et Y
            fin
        fin
    fin
```

2) a) $(1\,;2)$ est une solution particulière de (E) car : $7(1) - 3(2) = 7 - 6 = 1$

b) Soit $(x\,,\,y)$ une solution de (E) , comme $(1\,;2)$ est aussi une solution de (E) :

$$\left.\begin{array}{l} 7x - 3y = 1 \\ 7(1) - 3(2) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{en soustrayant termes à termes} \\ 7(x-1) - 3(y-2)\end{array}$$

On obtient alors l'équation (E') : $7(x-1) = 3(y-2)$.

3 divise $7(x-1)$, comme $\text{pgcd}(7,3) = 1$, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $(x-1)$.
On a alors : $x - 1 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$
En remplaçant dans (E'), on trouve : $y - 2 = 7k$.

Les couples solutions $(x\,;\,y)$ sont de la forme : $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 + 7k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) On encadre x et y :

$$\begin{array}{ll} -5 \leqslant x \leqslant 10 & -5 \leqslant y \leqslant 10 \\ -5 \leqslant 1 + 3k \leqslant 10 & -5 \leqslant 2 + 7k \leqslant 10 \\ -6 \leqslant 3k \leqslant 9 & -7 \leqslant 7k \leqslant 8 \\ -2 \leqslant k \leqslant 3 & -1 \leqslant k \leqslant 1 \end{array}$$

Les valeurs acceptables pour k sont : -1, 0 et 1.
On obtient alors les solutions : $(-2\,;-5)$, $(1\,;2)$, $(4\,;9)$

Partie B

1) a) $$\mathbf{MX}_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2}x_n + 3y_n \\ -\dfrac{35}{2}x_n + 8y_n \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{n+1}.$$

b) De proche en proche on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbf{X}_n = \mathbf{M}^n\mathbf{X_0}$

2) a) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13-15 & \dfrac{39}{2}-21 \\ 35-40 & \dfrac{105}{2}-56 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -\dfrac{3}{2} \\ -5 & -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14+15 & -\dfrac{21}{2}+\dfrac{21}{2} \\ 10-10 & \dfrac{15}{2}-\dfrac{14}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

b) On obtient alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}$

c) De $\ \mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}$, en multipliant à gauche par $\mathbf{P}$ et à droite par $\mathbf{P}^{-1}$, on obtient :

$$\mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{DP})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{IMI} = \mathbf{M}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{M}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$.

Initialisation : $n = 0$. $\mathbf{PD}^0\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PIP}^{-1} = \mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{M}^0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathbf{M}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$, montrons que $\mathbf{M}^{n+1} = \mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$.

De HR $\mathbf{M}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{PDP}^{-1}$, en multipliant à gauche par $\mathbf{M}$, on obtient :

$\mathbf{M}^{n+1} = \mathbf{MM}^n = \mathbf{MPD}^n\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{PDP}^{-1})(\mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{PDID}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PDD}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbf{M}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$

3) On admet que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} -14+\dfrac{15}{2^n} & 6-\dfrac{6}{2^n} \\ -35+\dfrac{35}{2^n} & 15-\dfrac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{M}^n\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} -14+\dfrac{15}{2^n} & 6-\dfrac{6}{2^n} \\ -35+\dfrac{35}{2^n} & 15-\dfrac{14}{2^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} x_n = -14+\dfrac{15}{2^2}+12-\dfrac{12}{2^n} = -2+\dfrac{3}{2^n} \\ y_n = -35+\dfrac{35}{2^n}+30-\dfrac{28}{2^n} = -5+\dfrac{7}{2^n} \end{cases}$$

4) Vérifions que les coordonnées du point A_n vérifient l'équation de la droite $\mathscr{D}$.

$7x_n - 3y_n - 1 = -14 + \dfrac{21}{2^n} + 15 - \dfrac{21}{2^n} - 1 = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{A}_n \in \mathscr{D}$

EXERCICE 2

Facultatif **(bonus)**

1) a) $n^2 \equiv N-1\ (N)$

On élève au carré (compatibilité avec la puissance), on obtient alors :

$(n^2)^2 \equiv (N-1)^2\ (N) \quad \Leftrightarrow \quad n^4 \equiv N^2-2N+1\ (N)$

Comme $N^2-2N = N(N-2) \equiv 0\ (N)$, on a $n \times n^3 \equiv 1\ (N)$

b) On veut $5k_1 \equiv 1\ (26)$ de a) en prenant $n=5$, on obtient $5^2 = 25 \equiv 26-1\ (26)$ donc $5 \times 5^3 \equiv 1\ (26) \quad \Leftrightarrow \quad 5 \times 125 \equiv 1\ (26)$. On peut donc prendre $k_1 = 125$.

$125 \equiv 21\ (26)$, d'où le choix de l'énoncé.

2) a) $6\mathbf{A}-\mathbf{A}^2 = 6\begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24 & 6\\18 & 12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}16+3 & 4+2\\12+6 & 3+4\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}24 & 6\\18 & 12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}19 & 6\\18 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{pmatrix} = 5\mathbf{I}$$

b) On a : $6\mathbf{A}-\mathbf{A}^2 = 5\mathbf{I}$

- On factorise à gauche par $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}(6\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 5\mathbf{I} \overset{\times\frac{1}{5}}{=} \mathbf{A} \times \dfrac{1}{5}(6\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{I}$
- On factorise à droite par $\mathbf{A}$: $(6\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{A} = 5\mathbf{I} \overset{\times\frac{1}{5}}{=} \dfrac{1}{5}(6\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{I}$

On pose $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{5}(6\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \dfrac{6}{5}\mathbf{I} - \dfrac{1}{5}\mathbf{A}$

$\mathbf{A}$ est bien inversible car $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

c) $5\mathbf{A}^{-1} = 6\mathbf{I}-\mathbf{A} = 6\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-4 & 0-1\\0-3 & 6-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 4\end{pmatrix} = \mathbf{B}$.

d) $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$, on multiplie à gauche par $5\mathbf{A}^{-1}$, on obtient :

$5\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = 5\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y} \quad \overset{5\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}}{\Leftrightarrow} \quad 5\mathbf{IX} = \mathbf{BY} \quad \Leftrightarrow \quad 5\mathbf{X} = \mathbf{BY}$