Correction contrôle de mathématiques
du mardi 9 avril 2013.

EXERCICE 1

Identité remarquable **(4 points)**

1) On a : $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ d'où

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+80 & 48+96 \\ 60+120 & 80+144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 & 144 \\ 180 & 224 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 & 78 \\ 91 & 106 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{AB} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 44 \\ 86 & 100 \end{pmatrix}$$

On a donc : $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 112 & 132 \\ 192 & 228 \end{pmatrix}$

2) On a donc $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$ car le produit de matrices n'est pas commutatif, c'est à dire que : $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

EXERCICE 2

Marice et système **(5 points)**

1) a) Cet algorithme calcule la matrice inverse de la matrice **M**, en effet :

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b) Si le déterminant est nul, a matrice inverse n'existe pas. On dit que **M** est singulière.

c) On a : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

2) a) On a en considérant de temps $\dfrac{d}{v}$:

- pour le voyge aller : x km de montée et y km de descente : $\dfrac{x}{60} + \dfrac{y}{90} = \dfrac{12}{60}$
- pour le voyge retour : x km de descente et y km de montée : $\dfrac{x}{90} + \dfrac{y}{60} = \dfrac{13}{60}$

On obtient alors le système suivant en $(\times 180)$: $\begin{cases} 3x+2y = 36 \\ 2x+3y = 39 \end{cases}$

On obtient bien : $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$

b) On a alors : $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$

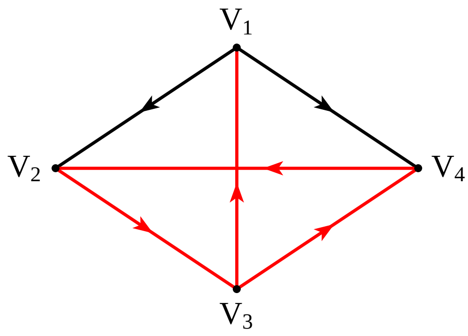
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{2}{5} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{108-78}{5} \\ \dfrac{-72+117}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) La distance d (domicile - travail) : $d = x + y = 15$ km

Exercice 3

Trafic aérien **(4 points)**

1) Voir ci-contre



2) La matrice associée au graphe est :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) On obtient les matrices suivantes :

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) La matrice $\mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3$ ne possède aucun "0", donc on peut relier toute ville V_i à la ville V_j. $\mathbf{M}$ correspond à un vol direct, $\mathbf{M}^2$ à un vol avec une escale et $\mathbf{M}^3$ à un vol avec deux escales. Toutes les villes sont donc reliable avec au plus deux escales.

Exercice 4

Part de marché **(7 point)**

1) **Ecriture matricielle**. On a le système suivant :

$$(S) \begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3b_b \\ b_{n+1} = 0,4a_n + 0,7b_n \end{cases}$$

2) **Suite de matrice**.

a) On pose : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$, on a alors : $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$

b) On a : $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}\mathbf{U}_{n-1} = \mathbf{A}^2\mathbf{U}_{n-2} = \cdots = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_0$. On pourrait éventuellement montrer cette relation par récurrence.

A l'aide de la calculatrice on trouve :

$$\mathbf{U}_{15} = \mathbf{A}^{15}\,\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 0,4286 & 0,4286 \\ 0,5714 & 0,5714 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4286 \\ 0,5714 \end{pmatrix}$$

3) **Expresion de $\mathbf{U}_n$.**

a) De la relation $a_n + b_n = 1$, en remplaçant dans le système (S), on trouve :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3(1-a_n) \\ b_{n+1} = 0,4(1-b_n) + 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0,3a_n + 0,3 \\ b_{n+1} = 0,3b_n + 0,4 \end{cases}$$

On pose alors : $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}$.

On a alors : $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{D}\mathbf{U}_n + \mathbf{E}$

b) Pour déterminer $\mathbf{C}$, on a :

$$\begin{aligned} &\mathbf{C} = \mathbf{DC} + \mathbf{E} \\ &\mathbf{C} - \mathbf{DC} = \mathbf{E} \\ &\mathbf{C}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{D}) = \mathbf{E} \\ &\mathbf{C} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{D})^{-1}\,\mathbf{E} \end{aligned}$$

On a : $\mathbf{I} - \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $\det(\mathbf{I} - \mathbf{D}) = 0,49$ donc :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} = \frac{1}{0,49}\begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & 0 \\ 0 & \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

On a alors : $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & 0 \\ 0 & \frac{10}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

c) On calcule :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{U}_n + \mathbf{E} - \mathbf{C}$$

or $\mathbf{C} = \mathbf{DC} + \mathbf{E}$, donc :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{D}\mathbf{U}_n + \mathbf{E} - \mathbf{DC} - \mathbf{E} = \mathbf{D}(\mathbf{U}_n - \mathbf{C}) = \mathbf{D}\mathbf{X}_n$$

d) De proche en proche, on obtient : $\mathbf{X}_n = \mathbf{D}^n\,\mathbf{X}_0$ avec $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} a_0 - \frac{3}{7} \\ b_0 - \frac{4}{7} \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 - \frac{3}{7} \\ b_0 - \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3^n\left(a_0 - \frac{3}{7}\right) \\ 0,3^n\left(b_0 - \frac{4}{7}\right) \end{pmatrix}$$

D'ou $\mathbf{U}_n = \mathbf{X}_n + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0,3^n\left(a_0 - \frac{3}{7}\right) + \frac{3}{7} \\ 0,3^n\left(b_n - \frac{4}{7}\right) + \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

e) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3^n = 0$ car $-1 < 0,3 < 1$

Donc la suite de matrice colonne $(\mathbf{U}_n)$ converge vers : $\begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\ \dfrac{4}{7} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0,4286 \\ 0,5714 \end{pmatrix}$

On retrouve le résultat du 2b).