Correction contrôle de mathématiques

Mardi 11 février 2014.

Exercice 1

Question de cours. **(5 points)**

1) Voir le cours

2) a) Si un nombre n n'admet pas de diviseurs premier p compris entre 2 et $\sqrt{n}$ alors n est premier.

b) On calcule : $\sqrt{419} \simeq 20$ à l'unité près.

On teste tous les diviseurs premiers de 2 à 19 compris. D'après les règles de divisibilité, 419 n'est pas divisible par 2, 3, 5 et 11.

Reste à tester 7 , 13, 17 et 19. On peut résumer les divisions dons le tableau suivant :

Diviseurs	7	13	17	19
Quotient	59	32	24	22
Reste	6	3	11	1

419 n'a pas de diviseurs premiers inférieurs ou égal à $\sqrt{419}$, d'après le critère d'arrêt, 419 est premier.

3) On a : $8\,316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$.

8 316 a donc : $(2+1)(3+1)(1+1)(1+1) = 48$ diviseurs

Exercice 2

Algorithme **(2 points)**

1) On rentre $A = 12$, on obtient alors :
   - 1re boucle : 1 et 12
   - 2e boucle : 2 et 6
   - 3e et dernière boucle : 3 et 4

2) Cet algorithme permet de donner l'ensemble des diviseurs du nombre A.

Exercice 3

Trouver un nombre premier **(3 points)**

1) On a : $29p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ relation (1)

2) Un nombre premier p divise un produit ab si, et seulement si, p divise a ou b.

3) D'après la question 1), comme 29 est premier, 29 divise le produit $(n-1)(n+1)$, donc :
   - soit 29 divise $(n-1)$ alors $n - 1 = 29k$ en remplaçant dans l'expression (1), on a : $29p = 29k(n+1) \Leftrightarrow p = k(n+1)$. Comme p est premier alors $k = 1$. On en déduit :

$$n - 1 = 29 \quad \text{donc} \quad n = 30 \quad \text{donc} \quad p = n + 1 = 31$$

- soit 29 divise $(n+1)$ alors $n+1 = 29k$ en remplaçant dans l'expression (1), on a : $29p = 29k(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad p = k(n-1)$. Comme p est premier alors $k = 1$. On en déduit :

$$n+1 = 29 \quad \text{donc} \quad n = 28 \quad \text{donc} \quad p = n-1 = 27 \quad \text{non premier. Impossible}$$

Conclusion : Seul le couple $n = 30$ et $p = 31$ convient.

Exercice 4

Bac **(10 points)**

1) On ne peut avoir $p \equiv 0 \mod 3$ car p est premier supérieur ou égal à 7 et donc non multiple de 3 ($p \neq 3$)
   On ne peut avoir alors que :
   - $p \equiv 1 \mod 3 \quad \Leftrightarrow \quad p^4 - 1 \equiv 0 \mod 3$
   - $p \equiv 2 \mod 3 \quad \Leftrightarrow \quad p^4 - 1 \equiv 15 \equiv 0 \mod 3$

   Conclusion : $n = p^4 - 1$ est divisible par 3

2) Comme p est impair, alors on peut écrire $p = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors :
$$p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1)$$
   k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair, et donc $p^2 - 1$ est divisible par $2 \times 4 = 8$
   De plus $n = p^4 - 1 = (p^2-1)(p^2+1)$. On sait qu'un nombre et son carré ont même parité, comme p est impair, p^2 est impair et donc $p^2 + 1$ est pair.

   Conclusion : n est divisible par $8 \times 2 = 16$.

3) On ne peut avoir $p \equiv 0 \mod 5$ car p est premier supérieur ou égal à 7 et donc non multiple de 5 ($p \neq 5$).
   On teste alors les quatre autres cas par un tableau de congruence modulo 5 :

p	1	2	3	4
$p^4 - 1$	0	15	80	255

   Comme 15, 80, 255 sont des multiples de 5, $p^4 - 1 \equiv 0 \mod 5$ donc 5 divise n.

4) a) D'après le corollaire du théorème de Gauss, si a et b divisent c et si $\text{pgcd}(a,b) = 1$ alors ab divise c

   b) 3, 16 et 5 divisent n et comme 3, 16 et 5 sont premiers entre eux deux à deux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $3 \times 16 \times 5 = 240$ divise n

5) On sait que $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ sont supérieurs ou égaux à 7, d'après la question précédente, $240 = 15 \times 16$ et donc 15 divise $p_i^4 - 1$ pour tout i de 1 à 15.
$$\text{A} - 15 = (p_1^4 - 1) + (p_2^4 - 1) + \cdots + (p_{15}^4 - 1) = 15(k_1 + k_2 + \cdots + k_{15}) \quad k_1 \in \mathbb{N}^*,\ k_2 \in \mathbb{N}^*, \ldots k_{15} \in \mathbb{N}^*$$
   On a alors : $\text{A} = 15(k_1 + k_2 + \cdots + k_{15}) + 15 = 15(k_1 + k_2 + \cdots + k_{15} + 1)$
   Donc 15 divise A et donc A n'est jamais premier pour tous p_1, p_2,..., p_{15}.