Correction contrôle de mathématiques

Du mardi 19 février 2013.

EXERCICE 1

Question de cours. (5 points)

1) Voir le cours

2) a) Si un nombre n n'admet pas de diviseurs premier p compris entre 2 et $\sqrt{n}$ alors n est premier

   b) On a 15 nombres premiers inférieurs à 50 :
   2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

   - Pour 577, on calcule : $\sqrt{577} \simeq 24$.
     On teste tous les diviseurs premiers de 2 jusqu'à 23 compris. Aucun ne divise 577 donc 577 est premier
   - Pour 689, on calcule : $\sqrt{689} \simeq 26,2$.
     On teste tous les diviseurs premiers de 2 jusqu'à 23 compris. 13 divise 689 ($689 = 13 \times 53$) donc 689 n'est pas premier.

3) Si un nombre n se décompose en : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$ alors le nombre N de diviseurs de n est :
$$N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_r + 1)$$
On décompose 792 : $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$. On a donc :
$$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ diviseurs}$$

EXERCICE 2

Triplet premier ? (3 points)

Soit un nombre premier p. On a 3 éventualités

- $p \equiv 0 \pmod 3$.
  $p = 3$ car p est premier. On a :
  $$p + 1000 = 1003 = 17 \times 59, \qquad p + 1000 \text{ n'est donc pas premier}$$
- $p \equiv 1 \pmod 3$. On a :
  $$p + 2000 \equiv 2001 \pmod 3 \quad \text{et} \quad 2001 = 3 \times 667 \quad \text{donc} \quad p + 2000 \equiv 0 \pmod 3$$
  $p + 2000 > 3$ est donc divisible par 3 donc non premier
- $p \equiv 2 \pmod 3$. On a :
  $$p + 1000 \equiv 1002 \pmod 3 \quad \text{et} \quad 1002 = 3 \times 334 \quad \text{donc} \quad p + 1000 \equiv 0 \pmod 3$$
  $p + 1000 > 3$ est donc divisible par 3 donc non premier

Conclusion : il est impossible de trouver un nombre premier p pour que $p+1000$ et $p+2000$ le soit également.

Exercice 3

Nombre d'éléments **(5 points)**

1) a) $1001 = 7 \times 11 \times 13$

   b) Tout élément n de (E) est de la forme $\overline{abba}$ donc :

$$\begin{aligned} n &= a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + a \\ &= a(10^3+1) + b(10^2+10) \\ &= 1001a + 110b \\ &= 11(91a+10b) \end{aligned}$$

   n est donc divisible par 11

2) a) On doit avoir : $2 \leqslant a \leqslant 9$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$
   On a donc 8 choix pour a et 10 choix pour b soit : $8 \times 10 = 80$ choix possibles.

   b) Les éléments de (E) divisibles par 2 ou 5 sont ceux dont le dernier chiffre a est : 2, 4, 6, 8 ou 5

   On a donc 5 choix pour a et 10 choix pour b soit : $5 \times 10 = 50$ choix possibles.
   Le nombre d'éléments de (E) non divisibles par 2 et 5 est égal à : $80 - 50 = 30$

3) a) Un nombre n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 donc :

$$a+b+b+a \equiv 0 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2(a+b) \equiv 0 \pmod 3$$

   3 divise $2(a+b)$ et comme $\text{pgcd}(3,2) = 1$ d'après le théorème de Gauss 3 divise $(a+b)$.
   n est divisible par 3 si et seulement si $a+b$ est divisible par 3

   b) n est divisible par 7 si et seulement si :

$$10^3a + 10^2b + 10b + a \equiv 0 \pmod 7 \quad \Leftrightarrow \quad 1001a + 110b \equiv 0 \pmod 7$$

   or 1001 est divisible par 7 et $110 = 7 \times 15 + 5$ donc : $5b \equiv 0 \pmod 7$
   7 divise $5b$ et comme $\text{pgcd}(7,5) = 1$ d'après le théorème de Gauss 7 divise b.

   n est divisible par 7 si et seulement si b est divisible par 7

4) D'après les questions précédentes, $\overline{abba}$ non divisible par 2, 5 et 7 implique :

$$a \in \{3,7,9\} \quad \text{et} \quad b \in \{1,2,3,4,5,6,8,9\}$$

- Si $a = 3$ alors $3 + b \not\equiv 0 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad b \not\equiv 0 \pmod 3$
  Les choix possibles pour b sont donc : 1, 2, 4 ,5, 8
- Si $a = 7$ alors $7 + b \not\equiv 0 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad b \not\equiv 2 \pmod 3$
  Les choix possibles pour b sont donc : 1, 3, 4 ,6, 9
- Si $a = 9$ alors $9 + b \not\equiv 0 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad b \not\equiv 0 \pmod 3$
  Les choix possibles pour b sont donc : 1, 2, 4 ,5, 8

Conclusion : on a donc $5+5+5 = 15$ nombres de (E) dont le plus petit facteur premier est 11.

EXERCICE 4

Nombre de diviseurs (3 points)

On a : $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ donc $36n = 2^2 \times 3^2 \times 2^\alpha \times 3^\beta = 2^{\alpha+2} \times 3^{\beta+2}$

Le nombre de diviseurs de $36n$ est le triple de celui de n, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned}(\alpha+3)(\beta+3) &= 3(\alpha+1)(\beta+1)\\ \alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 9 &= 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3\\ 2\alpha\beta &= 6\\ \alpha\beta &= 3\end{aligned}$$

Donc 2 couples sont possible (1 ;3) et (3 ;1) ce qui donne pour n

$$n = 2^1 \times 3^3 = 54 \quad \text{ou} \quad n = 2^3 \times 3^1 = 24$$

EXERCICE 5

Logique **(4 points)**

- **Proposition 1 :**
  1) **Faux** 18 divise $36 = 6^2$ mais 18 ne divise pas 6
  2) **Réciproque :** "n divise a, alors n divise a^2"
  3) La réciproque est **vraie**. immédiat

- **Proposition 2 :**
  1) **Faux** car 2 est premier
  2) **Réciproque :** "Si a est imapair alors n est premier"
  3) La réciproque est **fausse**. 9 n'est pas premier

- **Proposition 3 :**
  1) **Vrai** ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1
  2) **Réciproque :** "Si p et q sont premiers entre eux alors p et q sont deux nombres premiers distincts"
  3) La réciproque est **fausse**. 10 et 9 sont premiers entre eux mais ne sont pas premiers.

- **Proposition 4 :**
  1) **Vrai**. c'est même la difinition d'un nombre premier
  2) **Réciproque :** "Si p admet exactement deux diviseurs alors p est premier"
  3) La réciproque est **vraie**. car c'est une équivalence

- **Proposition 5 :**
  1) **Vrai** C'est le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers.
  2) **Réciproque :** "Si p divise a ou b alors p premier divise ab"
  3) La réciproque peut être **fausse** car si p divise a ou b, p n'est pas nécessairement premier ou

     vraie si le fait que p soit premier soit implicite.

- **Proposition 6 :**

1) **Faux**. car $a \equiv p \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv 0 \pmod{p}$ cela signifie que p divise a, on peut donc avoir $a = 2p$ qui n'est pas premier
2) **Réciproque :** "a premier alors $a \equiv p \pmod{p}$"
3) La réciproque est **fausse**. a premier peut être distinct de p et donc p ne divise pas a.