Correction du devoir du vendredi 10 novembre 2017

EXERCICE 1

Divisibilité **(3 points)**

1) $(n-4)$ divise $(3n-17)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$3n - 17 = k(n-4) \iff 3(n-4) - 5 = k(n-4) \iff (n-4)(3-k) = 5$

donc $(n-4)$ divise 5 d'où $(n-4) \in \{-5, -1, 1, 5\} \iff n \in \{-1, 3, 5, 9\}$

2) Si d divise a et b, d divise toute combinaison de a et de b donc d divise :

$$-2a + 3b = -12k + 4 + 12k + 9 = 13$$

d divise 13. Les valeurs possibles pour d sont : -13 , -1 , 1 , 13

EXERCICE 2

Reste **(4 points)**

1) On détermine le cycle des reste de 2^n par 5 :

$2^0 \equiv 1\ (5)$, $2^1 \equiv 2\ (5)$, $2^2 \equiv 4\ (5)$, $2^3 \equiv 8 \equiv 3\ (5)$, $2^4 \equiv 16 \equiv 1\ (5)$

Le cycle est donc de 4. On obtient le tableau suivant :

$n \equiv\ (4)$	0	1	2	3
$2^n \equiv\ (5)$	1	2	4	3

2) $1357 \equiv 2\ (5)$ car $1357 = 5 \times 271 + 2$. Par puissance $1357^{2017} \equiv 2^{2017}\ (5)$

or $2017 \equiv 1\ (4)$ car $2017 = 4 \times 504 + 1$. D'après la question 1) : $2^{2017} \equiv 2\ (5)$.

Le reste dans la division par 5 de 1357^{2017} est : 2.

EXERCICE 3

Divisibilité **(4 points)**

1)
- $3^2 = 9 = 7 \times 1 + 2$ on a la suite des équivalences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $3^2 \equiv 2\ (7) \overset{\uparrow n}{\iff} \left(3^2\right)^n \equiv 2^n\ (7) \overset{\times 3}{\iff} 3 \times \left(3^2\right)^n \equiv 3 \times 2^n\ (7) \iff 3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n\ (7)$

- $2^4 = 16 = 7 \times 2 + 2$ on a la suite des équivalences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $2^4 \equiv 2\ (7) \overset{\uparrow n}{\iff} \left(2^4\right)^n \equiv 2^n\ (7) \overset{\times 2^2}{\iff} 2^2 \times \left(2^4\right)^n \equiv 2^2 \times 2^n\ (7) \iff 2^{4n+2} \equiv 4 \times 2^n\ (7)$

- Par somme $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2} \equiv 3 \times 2^n + 4 \times 2^n \equiv 7 \times 2^n\ (7)$

Donc $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2)
- $3^3 = 27 = 13 \times 2 + 1$ on a la suite des équivalences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $3^3 \equiv 1\ (13) \overset{\uparrow 42}{\iff} \left(3^3\right)^{42} \equiv 1^{42}\ (13) \iff 3^{126} \equiv 1\ (13)$

- $5^2 + 1 = 26 = 13 \times 2$ on a la suite des équivalences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $5^2 + 1 \equiv 0\ (13) \iff 5^2 \equiv -1\ (13) \overset{\uparrow 63}{\iff} \left(5^2\right)^{63} \equiv (-1)^{63}\ (13) \iff 5^{126} \equiv -1\ (13)$

- Par somme : $3^{126}+5^{126}\equiv 1-1\equiv 0\ (13)$.

Donc $3^{126}+5^{126}$ est divisible par 13.

Exercice 4

Résolution dans $\mathbb{N}$ **(4 points)**

1) 2^{40} est pair donc a^2+9 est pair.
   - Une somme d'entiers est paire si les deux entiers sont de même parité. Comme 9 est impair alors a^2 est impair.
   - Un entier et son carré ont même parité donc comme a^2 est impair a est impair.

   Si a est solution de (E) alors a est impair.
   Les restes possibles dans la division par 8 de a sont donc 1, 3, 5, 7

2) On s'intéresse au reste dans division par 8 de a^2, a étant impair.

$a\equiv\ (8)$	1	3	5	7
$a^2\equiv\ (8)$	1	1	1	1

   Si a est solution $a^2\equiv 1\ (8)\quad\Leftrightarrow\quad a^2+9\equiv 1+9\equiv 10\equiv 2\ (8)$.

   Si a est solution le reste dans la division par 8 de (a^2+9) est 2.

3) $2^{40}=2^3\times 2^{37}=8\times 2^{37}$. Donc 2^{40} est divisible par 8.

   Contradiction car (a^2+9) n'est pas divisible par 8. L'équation (E) n'a pas de solution.

Exercice 5

Suites **(5 points)**

1) $\forall n\geqslant 1,\quad u_n=9\times 2^n-6\overset{n-1\geqslant 0}{=}6(3\times 2^{n-1}-1)$.

   Pour $n\geqslant 1$, le terme u_n est divisible par 6.

2) L'affirmation est fausse car si l'on avait une formule donnant des nombres premiers cela se saurait. Calculons les premiers termes de (v_n) afin de trouver un terme non premier.

n	1	2	3	4	5	6
u_n	12	30	66	138	282	570
v_n	2	5	11	23	47	95

   $v_6=5\times 19$ n'est pas premier. C'est notre contre-exemple.

3) a) On a les équivalences suivantes pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$2^4\equiv 1\ (5)\ \overset{\uparrow k}{\Leftrightarrow}\ \left(2^4\right)^k\equiv 1^k\ (5)\ \overset{\times 2^2}{\Leftrightarrow}\ 2^2\left(2^4\right)^k\equiv 2^2\ (5)\ \Leftrightarrow\ 2^{4k+2}\equiv 4\ (5)$$
$$\overset{\times 9}{\Leftrightarrow}\ 9\times 2^{4k+2}\equiv 36\ (5)\ \overset{-6}{\Leftrightarrow}\ 9\times 2^{4k+2}-6\equiv 30\ (5)$$
$$\Leftrightarrow\ u_n\equiv 30\equiv 0\ (5)$$

   u_{4k+2} est divisible par 5, donc si $k\geqslant 1$, v_n n'est pas premier.

   b) Non, il suffit de trouver un contre-exemple :

   $u_0=9-6=3$ n'est pas divisible par 5.