Correction du devoir du jeudi 03 novembre 2016

EXERCICE 1

Diviseurs **(4,5 points)**

a) Si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire de a et de b donc de :

$$9a - 2b = 18k + 99 - 18k + 26 = 125$$

b) Les valeurs possibles pour d sont les diviseurs de 125 : $D(125) = \{1\ ;\ 5\ ;\ 25\ ;\ 125\}$.

c) $1\,013 = 2 \times 501 + 11$ et $4\,496 = 9 \times 501 - 13$, donc 1 013 et 4 496 sont respectivement des valeurs possibles pour a et b.
Comme 1 013 et 4 496 ne sont pas divisibles par 5, ils n'admettent qu'un diviseur commun : 1

EXERCICE 2

Division euclidienne **(3 points)**

a) $-1\,208 = -23 \times 51 - 35 = -23 \times 51 - 51 + 16 = -51 \times 24 + 16$.

Le reste de la division de $-1\,208$ par 51 est 16.

b) $1\,208 = 23 \times 51 + 23 + 12 = 23 \times 52 + 12$.

Le reste de la division de 1 208 par 23 est 12.

EXERCICE 3

Restes **(4,5 points)**

a) $125 = 17 \times 7 + 6$ donc $125 \equiv 6\ (17)$.

$5^{3n} \equiv (5^3)^n \equiv 6^n\ (17) \quad \Leftrightarrow \quad 5^{3n} - 6^n \equiv 0\ (17)$.

Le reste de la division euclidienne de $5^{3n} - 6^n$ par 17 est 0.

b) $39 = 7 \times 5 + 4$ donc $39 \equiv 4\ (7)$ et $4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1$ donc $4^3 \equiv 1\ (7)$.

$39^{60} \equiv (39^3)^{20} \equiv (4^3)^{20} \equiv 1^{20} \equiv 1\ (7)$.

Le reste de la division euclidienne de 39^{60} par 7 est 1.

c) $2\,012 = 182 \times 11 + 10$ donc $2\,012 \equiv 10 \equiv -1\ (11)$.

$2\,012^{2012} \equiv (-1)^{2012} \equiv 1\ (11)$.

Le reste de la division euclidienne de 2012^{2012} par 11 est 1.

EXERCICE 4

Équation **(3 points)**

a) On obtient le tableau de congruence suivant :

$x \equiv \ (6)$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \ (6)$	0	1	4	3	4	1
$x+1 \equiv \ (6)$	1	2	3	4	5	0
$x^2+x+1 \equiv \ (6)$	1	3	1	1	3	1

b) Il n'y a pas de solution pour que $x^2 + x + 1$ soit divisible par 6.

EXERCICE 5

Défi du jour **(5 points)**

⚠ La difficulté ici est de bien compter les jours entre 2 dates.

a) Il faut calculer le nombre de jours entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2012 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2062.

- Entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2012 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2062, il y 50 années pleines.
- Comme l'année 2012 est bissextile, il y a $\mathrm{E}\left(\dfrac{50}{4}\right) + 1 = 13$ années bissextiles.
- Le nombre de jours est alors : $365 \times 50 + 13 = 18\,263$.
- On calcule ensuite le reste de la division du nombre de jours par 7 pour connaître le décalage de jours avec le 1$^{\text{er}}$ janvier 2012 :

$$18\,262 = 7 \times 2\,609 + 0$$

  Il n'y a donc pas de décalage de jours car le reste est nul.
- Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2062 sera donc un dimanche.

b) On utilise le même procédé :

- $2041 - 2012 = 29$ années pleines.
- $\mathrm{E}\left(\dfrac{29}{4}\right) + 1 = 8$ années bissextiles.
- Entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2041 et le 1$^{\text{er}}$ février 2041, il y a 31 jours, entre le 1$^{\text{er}}$ février 2041 et le 1$^{\text{er}}$ mars 2041, il y a 28 jours et entre 1$^{\text{er}}$ mars 2041 et le 10 mars 2041 il y a 9 jours.
- Entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2012 et le 10 mars 2041, il y a donc :

$$365 \times 29 + 8 + 31 + 28 + 9 = 10\,661 \text{ jours}$$

- On effectue la division par 7 : $10\,661 = 7 \times 1\,523 + 0$.
- Le reste est nul, donc le 10 mars 2041 sera encore un dimanche.

c) Il faut cette fois revenir en arrière.

- $2012 - 1974 = 38$ années pleines.
- $\mathrm{E}\left(\dfrac{38}{4}\right) = 9$ années bissextiles. (on ne compte pas 2012)

- Entre le 1er janvier 1974 et le 1er décembre 1973, il y a 31 jours, entre le 1er décembre 1973 et le 1er novembre 1973, il y a 30 jours et entre 1er novembre 1973 et le 5 octobre 1973 il y a 27 jours.
- Entre le 1er janvier 2012 et le 5 octobre 1973, il y a donc :

$$365 \times 38 + 9 + 31 + 30 + 27 = 13\,967 \text{ jours}$$

- On effectue la division par 7 : $13\,967 = 7 \times 1\,1995 + 2$.
- Le reste est 2, il faut revenir de 2 jours en arrière, Cédric Villani est donc né un vendredi..