Correction contrôle de mathématiques

Mardi 05 novembre 2013

Exercice 1

Multiples **4 points**

1) Les diviseurs positifs de 96 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96

2) a) " Si a divise b et c alors a divise toute combinaison linéaire de b et de c : $\alpha b + \beta c$

d divise $5n + 1$ et $3n - 4$ donc d divise :

$$3(5n + 1) + (-5)(3n - 4) = 15n + 3 - 15n + 20 = 23$$

d divise donc 23.

b) Comme 23 est un nombre premier : $d = 1$ ou $d = 23$

3) Si $n - 2$ divise $5n + 7$, alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$5n+7 = k(n-2) \quad \Leftrightarrow \quad 5n-10+17 = k(n-2) \quad \Leftrightarrow \quad k(n-2)-5(5n-2) = 17 \quad \Leftrightarrow \quad (n-2)(k-5) = 17$$

Donc $n - 2$ est donc un diviseur de 17. $D_{17} = \{-17; -1; 1; 17\}$

On obtient alors les valeurs de n suivantes : -15, 1, 3, 19

Exercice 2

Algorithme **2 points**

a) Si on rentre $A = 3$ on obtient $X = 3$

b) Si on rentre $A = 55$ on obtient $X = 3$

c) Si on rentre A, on obtient X le reste de la division de A par 13.

Exercice 3

Vrai-Faux **3 points**

a) **Proposition 1 : Faux**

Le reste dans une division euclidienne doit être inférieur au diviseur, or $19 > 17$. Le reste de 1600 par 17 est 2 car :

$$1600 = 17 \times 94 + 2$$

Proposition 2 : Vrai

Résolution par un tableau de congruence :

Reste de la division de x par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de x^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Si $x^3 \equiv 0 \pmod 9$ alors :

$$x \equiv 0 \pmod 9 \quad \text{ou} \quad x \equiv 3 \pmod 9 \quad \text{ou} \quad x \equiv 6 \pmod 9$$

Donc x est divisible par 3 donc $x \equiv 0 \pmod 3$

b) **Proposition 3 : Faux** Pour le prouver faisons un tableau de congruence

Reste de la division de x par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division de $x^2 + x + 3$ par 5	3	0	4	0	3

Conclusion : $x^2 + x + 3$ divisible par 5 $\Leftrightarrow$ $x \equiv 1 \pmod 5$ **ou** $x \equiv 3 \pmod 5$

EXERCICE 4

ROC **4 points**

1) Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$), a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod n \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod n$$

La congruence est compatible :
- avec l'addition : $a + c \equiv b + d \pmod n$
- avec la multiplication : $ac \equiv bd \pmod n$
- avec les puissances : $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad a^k \equiv b^k \pmod n$

2) On sait que : $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$, donc $(a - b)$ et $(c - d)$ sont des multiples de n. Il existe donc deux entiers relatifs k et k' tels que :

$$a - b = kn \quad \text{et} \quad c - d = k'n$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$a - b + c - d = kn + k'n \quad \Leftrightarrow \quad (a + c) - (b + d) = (k + k')n$$

Donc $(a + c) - (b - d)$ est un multiple de n, donc d'après le prérequis, on obtient : $a + c \equiv b + d \pmod n$

3) **Application :** On a : $3^2 \equiv 2 \pmod 7$ car $9 = 7 \times 1 + 2$

On a alors d'après la compatibilité avec l'addition :

$$2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 4 \times 2^n + 3 \times \left(3^2\right)^n \equiv 4 \times 2^n + 3 \times 2^n \equiv 7 \times 2^n \equiv 0 \pmod 7$$

Donc $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

EXERCICE 5

Congruence **5 points**

1) On a : $2011 = 7 \times 287 + 2$ donc $2011 \equiv 2 \pmod 7$.

Étudions les reste de 2^n par la division par 7 en fonction de n

n	0	1	2	3
Reste de 2^n par la division par 7	1	2	4	1

On en déduit alors que :

- Si $n \equiv 0 \pmod 3$ alors $2^n \equiv 1 \pmod 7$
- Si $n \equiv 1 \pmod 3$ alors $2^n \equiv 2 \pmod 7$
- Si $n \equiv 2 \pmod 3$ alors $2^n \equiv 4 \pmod 7$

or $2011 = 3 \times 670 + 1$ donc $2011 \equiv 1 \pmod 3$ et donc $2^{2011} \equiv 2 \pmod 7$

Conclusion : $2011^{2011} \equiv 2^{2011} \equiv 2 \pmod 7$

2) Soit le tableau de congruence suivant :

Reste de la division de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de x^2 par 7	0	1	4	2	2	4	1

donc : $x \equiv 2 \pmod 7 \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 3 \pmod 7$ ou $x \equiv 4 \pmod 7$

Donc les solutions sont de la forme : $x = 7k + 3$ ou $x = 7k + 4, \quad k \in \mathbb{Z}$

3) a) On factorise : $A_n = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 + 1)(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair, donc A_n est divisible par 2 donc pair.

b) $n - 1$, n, $n + 1$ sont trois entiers consécutifs donc l'un des trois est divisible par 3, donc A_n est divisible par 3.

c) On rappelle que : $2^5 = 32, \quad 3^5 = 243, \quad 4^5 = 1024$

On remplit un tableau de congruence :

Reste de la division dê n par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division de n^5 par 5	0	1	2	3	4

On a donc : $n^5 \equiv n \pmod 5$ donc $n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$ et donc $n^5 - n$ est divisible par 5.

d) A_n est divisible par 2, 3 et 5 qui sont premiers donc A_n est divisible par $2 \times 3 \times 5 = 30$

Exercice 6

Le phare des baleines **2 points**

Soit x le nombre de marches du phare des baleines. D'après l'énoncé, nous avons les conditions suivantes :

- $246 \leqslant x \leqslant 260$
- Avec Laure : $x - 1 \equiv 0 \pmod 4 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{N}, \quad x = 4k + 1$ (1)
- Avec Ted : $x - 2 \equiv 0 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k' \in \mathbb{N}, \quad x = 3k' + 2$ (2)

$4 \times (2) - 3 \times (1)$: $\quad 4x - 3x = 12k' + 8 - 12k - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 12(k' - k) + 5$

On doit donc avoir $\quad x \equiv 5 \pmod{12} \quad \Leftrightarrow \quad x - 5 \equiv 0 \pmod{12}$

or $\quad 246 \leqslant x \leqslant 260 \quad \Leftrightarrow \quad 241 \leqslant x - 5 \leqslant 255$

On cherche donc un multiple de 12 compris entre 241 et 255. Il n'en n'existe qu'un $21 \times 12 = 252$

On en déduit que $\quad x - 5 = 252$ soit $\quad x = 257$

Il y a 257 marches dans le phare des baleines !