Contrôle de mathématiques

Correction du mardi 11 octobre 2011

Exercice 1

Diviseurs (5 points)

1) Les diviseurs de 240 sont :

$$D_{240} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240\}$$

2) Si $n - 4$ divise $n + 2$ alors il existe un entier relatif k tel que :

$$\begin{aligned} n + 2 &= k(n-4) \\ n - 4 + 6 &= k(n-4) \\ (n-4)(k-1) &= 6 \end{aligned}$$

Donc $n - 4$ divise 6. Les diviseurs de 6 sont : -6, -3, -2, -1, 1, 2, 6. On a donc le tableau solution suivant :

$n-4$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
n	-2	1	2	3	5	6	7	10

3) Si $n + 1$ divise $3n - 4$, alors il existe un entier relatif k tel que :

$$\begin{aligned} 3n - 4 &= k(n+1) \\ 3(n+1) - 7 &= k(n+1) \\ (n+1)(3-k) &= 7 \end{aligned}$$

Donc $n + 1$ divise 7. Les diviseurs de 7 sont : -7, -1, 1, 7. On a donc le tableau solution :

$n+1$	-7	-1	1	7
n	-8	-2	0	6

4) (ROC). Si a divise b et c, il existe k et k' entiers relatifs tel que : $b = ka$ et $c = k'a$. On a donc :

$$\alpha b + \beta c = \alpha ka + \beta k' a = (\alpha k + \beta k')a$$

Donc a divise $\alpha b + \beta c$.

Application : Soit d un diviseur commun à a et b. d divise donc toute combinaison linéaire de a et de b. il divise donc :

$$3a - b = 3n + 21 - 3n + 4 = 25$$

d divise 25, donc $d \in \{1, 5, 25\}$.

Exercice 2

Division euclidienne (3 points)

1) L'égalité $a = 15q + 51$ ne correspond pas à la division euclidienne de a par 15 car $51 \geqslant 15$. La relation est donc en sachant que $51 = 45 + 6 = 15 \times 3 + 6$:

$$a = 15(q+3) + 6$$

2) Soit a et b avec $a \geqslant b$ les entiers naturels. On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} a - b = 538 \quad (1) \\ \quad a = 13b + 34 \quad (2) \end{cases}$$

En faisant (2) − (1), on obtient :

$$\begin{aligned} b &= 13b + 34 - 538 \\ -12b &= -504 \\ b &= \frac{504}{12} = 42 \end{aligned}$$

On a alors $a = 538 + 42 = 580$.

Les deux entiers sont donc 580 et 42.

3) Soit b et r le diviseur et le reste. On a alors :

$$857 = 32b + r$$

On a les encadrements suivants :

$$\begin{aligned} 32b \leqslant &857 < 33b \\ \frac{857}{33} < &b \leqslant \frac{857}{32} \\ 25 < &b \leqslant 26 \end{aligned}$$

On en déduit : $b = 26$ et $r = 857 - 32 \times 26 = 25$.

Exercice 3

Congruence (6 points)

1) Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$), a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b\ (n) \quad \text{et} \quad c \equiv d\ (n)$$

On a les relation suivantes :

a) $a + c \equiv b + d\ (n)$

b) $ac \equiv bd\ (n)$

c) $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad a^k \equiv b^k\ (n)$

2) On a : $11 \equiv 4 \mod 7$
D'après la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

$$\begin{aligned}
11^2 &\equiv 4^2 \mod 7\\
11^2 &\equiv 16 \mod 7\\
11^2 &\equiv 2 \mod 7\\
(11^2)^3 &\equiv 2^3 \mod 7\\
11^6 &\equiv 8 \mod 7\\
11^6 &\equiv 1 \mod 7
\end{aligned}$$

Comme on a : $2\,011 = 6 \times 335 + 1$ et donc $11^{2\,011} = (11^6)^{335} \times 11$, alors :

$$\begin{aligned}
11^{2\,011} &\equiv 1^{335} \times 11 \mod 7\\
11^{2\,011} &\equiv 11 \mod 7\\
11^{2\,011} &\equiv 4 \mod 7
\end{aligned}$$

Le reste de la division de $11^{2\,011}$ par 7 est 4.

3) a) on a : $999 = 27 \times 37$
b) De $10^3 = 999 + 1$ on en déduit que :

$$\begin{aligned}
10^3 &\equiv 1 \mod 27\\
(10^3)^n &\equiv 1^n \mod 27\\
10^{3n} &\equiv 1 \mod 27
\end{aligned}$$

c) On a : $10^{100} = (10^3)^{33} \times 10$ et $100^{10} = 10^{20} = (10^3)^6 \times 100$.
D'après les propriétés de la congruence :

$$10^{100} + 100^{10} \equiv 1^{33} \times 10 + 1^6 \times 100 \equiv 110 \mod 27$$

or $110 = 27 \times 4 + 2$, donc $10^{100} + 100^{10} \equiv 2 \mod 27$

Le reste de la division de $10^{100} + 100^{10}$ par 27 est 2.

4) En deux parties

$\Rightarrow$ n est divisible par 17, donc :

$$\begin{aligned}
n &\equiv 0 \mod 17\\
10\,a + b &\equiv 0 \mod 17\\
(\times 5) \quad -50\,a - 5b &\equiv 0 \mod 17
\end{aligned}$$

or on a $-50 = 17 \times (-3) + 1$

$$a - 5b \equiv 0 \mod 17$$

$\Leftarrow$ $a - 5b$ multiple de 17

$$\begin{aligned}
a - 5b &\equiv 0 \mod 17\\
(\times 5) \quad 10\,a - 50b &\equiv 0 \mod 17
\end{aligned}$$

or on a $-50 = 17 \times (-3) + 1$

$$10\,a + b = 0 \mod 17$$

Application : Pour $816 = 81 \times 10 + 6$ on a $81 - 5 \times 6 = 51$
Comme $51 = 17 \times 3$ est un multiple de 17 alors 816 aussi.

Pour $16\,983 = 1\,698 \times 10 + 3$ et $1\,698 - 5 = 1\,683$.
or $1\,683 = 168 \times 10 + 3$ et $168 - 5 \times 3 = 153$
or $153 = 15 \times 10 + 3$ et $15 - 5 \times 3 = 0$

Comme 0 est mulitple de 17 donc 153, 1 683 et 16 983 aussi.

Exercice 4

Antilles Guyane 2011 : extrait (4 points)

1) $11 \equiv 1 \mod 5$ et $7 \equiv 2 \mod 5)$
D'après les propriétes de la congruence avec l'addition et la multiplication, on a :

$$11x^2 - 7y^2 \equiv 0 \mod 5$$
$$x^2 - 2y^2 \equiv 0 \mod 5$$
$$x^2 \equiv 2y^2 \mod 5$$

2) On a :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 sont respectivement 0,1,4 et 0,2,3.

3) Pour que l'équation (F) soit vérifiée, il faut que les restes de x^2 et $2y^2$ par la division euclidienne par 5 soit identiques, ce qui est possible uniquement si : $x^2 \equiv 2y^2 \equiv 0 \mod 5$
(F) est vérifiée si : $x \equiv y \equiv 0 \mod 5$

4) Si x et y sont multiples de 5, alors il existe deux entiers k et k' tels que : $x = 5k$ et $y = 5k'$
donc si : $11x^2 - 7y^2 = 5$ alors :

$$11 \times 25k^2 - 7 \times 25k' = 5$$
$$25(11k^2 - 7k'^2) = 5$$
$$5(11k - 7k') = 1$$

5 ne divise pas 1, donc l'équation (F) n'est pas vérifiée.
Il y a donc aucune de solution à l'équation (F).