Contrôle de mathématiques

Mardi 23 octobre 2012

Exercice 1

Multiples **4 points**

1) d et n sont des entiers naturels, $d \neq 0$.
   a) Démontrer que si d divise $3n + 4$ et $9n - 5$, alors d divise 17. On citera le théorème utilisé.
   b) Quelles sont les valeurs possibles pour d.
2) a) Montrer que tout entier relatif n, on a : $n^2 + 3n + 1 = (n - 1)(n + 4) + 5$
   b) Déterminer alors les valeurs de n pour lesquelles n^2+3n+1 est divisible par $n-1$.

Exercice 2

Division euclidienne **2 points**

1) Dans la division euclidienne de deux entiers naturels, le dividende est 63 est le reste 17. Donner toutes les valeurs possibles du quotient et du diviseur.
2) On divise un entier naturel n par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98. Quel est cet entier naturel n ?

Exercice 3

ROC **4 points**

1) Citer le théorème de la compatibilité de la conguence avec l'addition, la multiplication et la puisance.
2) **Pré-requis :** $a \equiv b \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad a - b \equiv 0 \pmod{n}$
   Soit a, b, c et d quatre relatifs tels que : $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$.
   Montrer que : $ac \equiv bd \pmod{n}$
3) **Application :** démontrer que $2013^{2013} \equiv 5 \pmod{8}$

Exercice 4

Congruence **3 points**

1) Compléter cette table des restes dans la congruence modulo 4

$x \equiv$	0	1	2	3
$x^2 \equiv$				

2) Prouver que l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$, d'inconnue x et y entiers relatifs, n'a pas de solution.
3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x + 3)^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

EXERCICE 5

Codage **7 points**

Partie A

1) Déterminer les restes de la division euclidienne de 5^n par 11 suivant les valeurs de n. On donnera les résultats sous forme d'un tableau.
2) Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^n par 11 suivant les valeurs de n. On donnera les résultats sous forme d'un tableau.

Partie B

Aux dix premières lettres de l'alphabet (A, B, C, D, E, F, G, G, I, J), on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note alors : $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

1) Dans cette question, f est la fonction définie sur Ω par « $f(n)$ est le reste de la division par 11 de 5^n ». À l'aide de f, on souhaite coder le message « BADGE ».
   a) Recopier et compléter la grille de codage suivante :

Lettre	B	A	D	G	E
n	2				
$f(n)$	3				
Lettre	C				

   b) Peut-on décoder le message sans ambiguité ? Pourquoi ?
2) Dans cette question , g est la fonction définie sur Ω par « g(n) est le reste de la division par 11 de 2^n ».
   a) Compléter la grille de codage suivante après l'avoir recopier :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
n	1									
$g(n)$	2									
Lettre	B									

   b) Pourquoi cette grille permet de décoder tout message sans ambiguité ? Décoder alors le mot « EJIF ».