Contrôle de mathématiques

Mardi 11 octobre 2011

Exercice 1

Diviseurs (6 points)

1) Trouver dans $\mathbb{N}$ tous les 20 diviseurs de 240. On donnera les diviseurs dans l'ordre croissant.

2) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $n+2$.

3) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $3n-4$.

4) (ROC). Démontrer le théorème suivant :

   Soit trois entiers relatifs a, b et c. Si a divise b et c alors a divise toute combinaison linéaire de b et de c, c'est à dire $\alpha b + \beta c$ avec α et β deux entiers relatifs.

   Application : Soit n un entier naturel ($n \geqslant 4$) et deux nombres entiers $a = n+7$ et $b = 3n-4$. Montrer que les seuls diviseurs communs possibles à a et b sont : 1, 5 et 25.

Exercice 2

Division euclidienne (4 points)

1) L'égalité $a = 15q + 51$ correspond-elle à la division euclidienne de a par 15 ? Sinon écrire l'égalité correspondante.

2) La différence de deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, la quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces nombres ?

3) Dans la division euclidienne entre deux entiers positifs, le dividende est 857 et le quotient 32.
   Quels peuvent être le diviseur et le reste.

Exercice 3

Congruence (6 points)

1) Citez le théorème sur les propriétés de compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances.

2) Montrer que $11^6 \equiv 1 \mod 7$. En déduire le reste dans la division euclidienne de $11^{2\,011}$ par 7.

3) a) Vérifier que 999 est divisible par 27.

   b) Démontrer que $10^{3n} \equiv 1 \mod 27$.

   c) Quel est le reste dans la division de $10^{100} + 100^{10}$ par 27 ?

4) Soit n un entier naturel, on sépare son nombre de dizaines a et le chiffre des unités b. On a alors : $n = 10\,a + b$

Prouver que n est divisible par 17 si et seulement si $a - 5b$ est divisible par 17.

Application : Montrer par ce procédé (que l'on peut réiterer) que les nombres : 816 et 16 983 sont divisible par 17.

Exercice 4

Antilles Guyane 2011 : extrait (4 points)

On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1) Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \mod 5$.

2) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter (sans justification) les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

3) En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

4) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;\,y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?