CORRIGE DU COLLECTOR

Question 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x = -x$

Solution : $x = -x \Leftrightarrow x + x = -x + x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{2} = 0$. $\mathcal{S} = \{0\}$.

☞ *Il est licite d'ajouter à chacun des membres d'une égalité le même nombre (ici x).*

Question 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, (a est un paramètre fixé) : $2x - a = 1$,

Solution : $2x - a = 1 \Leftrightarrow 2x - a + a = 1 + a \Leftrightarrow 2x = a + 1 \Leftrightarrow x = \frac{a+1}{2}$. $\mathcal{S} = \{\frac{a+1}{2}\}$.

Question 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-2x + 5 = 1$

Solution : $-2x + 5 = 1 \Leftrightarrow -2x + 5 - 5 = 1 - 5 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$. $\mathcal{S} = \{2\}$.

Penser à multiplier chacun des membres de l'égalité par -1 permet de se débarrasser ici des signes - ! Astuce à retenir !

Question 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-\frac{2}{3}x = 4,5$

Solution : $-\frac{2}{3}x = 4,5 \Leftrightarrow \quad x = \frac{4,5}{-\frac{2}{3}} = \frac{4,5\times 3}{-2} = \frac{13,5}{-2} = \frac{-27}{4}$. $\mathcal{S} = \{-\frac{27}{4}\}$.

Question 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2(4 - 2x) = 6 - (5x + 1)$

Solution : $2(4 - 2x) = 6 - (5x + 1) \Leftrightarrow 8 - 4x = 6 - 5x - 1 \Leftrightarrow -4x + 5x = 6 - 1 - 8 \Leftrightarrow x = -3$. $\mathcal{S} = \{-3\}$.

Question 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{4x}{9} - \frac{1}{5} = \frac{3}{7}x - 1$

Solution : $\frac{4x}{9} - \frac{1}{5} = \frac{3}{7}x - 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{9} - \frac{3x}{7} = -1 + \frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$\frac{4x\times 7}{9\times 7} - \frac{3x\times 9}{7\times 9} = \frac{-4}{5} \Leftrightarrow \frac{28x}{63} - \frac{27x}{63} = \frac{-4}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{63} = \frac{-4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{5}\times 63 = \frac{-252}{5}$. $\mathcal{S} = \{-\frac{252}{5}\}$.

Question 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{2}{5-4x} = \frac{3}{7}$

Solution : $\frac{2}{5-4x} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 3(5 - 4x) = 2\times 7$ *et* $5 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow 15 - 12x = 14$ *et* $x \neq \frac{5}{4}$ $\left(\frac{15}{12} = \frac{5}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 15 - 14 = 12x \Leftrightarrow 12x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$. $\mathcal{S} = \{\frac{1}{12}\}$.

Question 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3 = \frac{8}{\frac{2}{x} + \frac{4}{3}}$

Solution : l'expression $\frac{2}{x}$ *existe si et seulement* $x \neq 0$.

De plus, $\frac{2}{x} + \frac{4}{3}$ qui figure à un dénominateur doit être non nul.

Or $\frac{2}{x} + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Ainsi nécessairement, $x \neq 0$ *et* $x \neq -\frac{3}{2}$.

$$3 = \frac{8}{\frac{2}{x}+\frac{4}{3}} \Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{x} + \frac{4}{3}\right) = 8 \Leftrightarrow \frac{6}{x} + 4 = 8 \Leftrightarrow \frac{6}{x} = 8 - 4 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Vu que $\frac{3}{2} \notin \{0 \; ; \; -\frac{3}{2}\}$, *cette solution est acceptable et* $\mathscr{S} = \{-\frac{3}{2}\}$.

Question 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $5(2 + 3x) - 4x = 6 - (-3 + 11x)$

Solution : On développe : $10 + 15x - 4x = 6 + 3 - 11x \Leftrightarrow 10 + 11x = 9 - 11x \Leftrightarrow 11x + 11x = 9 - 10 \Leftrightarrow 22x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{22}$. $\mathscr{S} = \{-\frac{1}{22}\}$.

Question 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{2}{3}(5x-1)^2 = \frac{-1}{4}$

Solution : $S = \varnothing$ *: cette équation n'a aucune solution réelle car le membre de droite est strictement négatif et celui de gauche positif ou nul en tant que produit de deux facteurs l'un strictement positif* ($\frac{2}{3}$) *et l'autre positif ou nul* $(5x - 1)^2$.

Rappelons que d'après la règle des signes d'un produit, le carré de tout réel est positif ou nul !

Avant de se lancer dans un développement sauvage, toujours prendre quelques secondes pour regarder si une simple connaissance des signes de chacun des membres ne permet pas de conclure, ce qui est le cas ici !!

Question 11 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4x - 5x^2 = 0$

Solution : $4x - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4 - 5x) = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ ou \\ 4 - 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ ou \\ 5x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ ou \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right.$. $\mathscr{S} = \{0 \; ; \; \frac{5}{4}\}$.

☞ *Avant de se lancer dans la recherche de delta, on essaiera toujours de voir au préalable s'il n'y a pas une factorisation à vue, qui simplifie la tâche ! Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs au moins vaut 0.*

Question 12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3 - 2x = -\frac{x}{3}$.

Solution : $3 - 2x = -\frac{x}{3} \Leftrightarrow 2x - \frac{x}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{6x}{3} - \frac{x}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{5x}{3} = 3 \Leftrightarrow 5x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$.

$\mathcal{S} = \{\frac{9}{5}\}$.

Question 13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x(2x + 8) = 6 - (4x - 1)(-x - 5)$

Solution : en développant on a : $2x^2 + 8x = 6 - (-4x^2 - 20x + x + 5) \Leftrightarrow 2x^2 + 8x = 6 + 4x^2 + 20x - x - 5 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x^2 + 19x - 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 11x + 1 = 0$.

On calcule $\Delta = 11^2 - 4\times2\times1 = 121 - 8 = 113$.

Vu que $\Delta > 0$*, ce trinôme admet deux racines réelles :* $x_1 = \frac{-11-\sqrt{113}}{4}$ *et* $x_2 = \frac{-11+\sqrt{113}}{4}$.

$\mathcal{S} = \left\{\frac{-11-\sqrt{113}}{4} ; \frac{-11+\sqrt{113}}{4}\right\}$

Question 14 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue a, où x est un paramètre fixé : $\frac{a}{x} + \frac{x}{a} = 2$

Solution : Nécessairement, a et x sont non nuls afin que l'expression $\frac{a}{x} + \frac{x}{a}$ existe.

$\frac{a}{x} + \frac{x}{a} = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{ax} + \frac{x^2}{ax} = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+x^2}{ax} = 2 \Leftrightarrow a^2 + x^2 = 2ax\ [\text{car } a\neq0 \text{ et } x\neq0] \Leftrightarrow a^2 - 2ax + x^2 = 0 \Leftrightarrow (a-x)^2 = 0 \Leftrightarrow a = x$. $\mathcal{S} = \{x\}$.

Question 15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{5} = 0$

Solution : $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5x = \sqrt{x^2+1}$ *(il n'y a ici aucune valeur interdite à exclure car pour tout réel x,* $x^2 + 1 > 0$*).*

$5x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow (5x)^2 = (\sqrt{x^2+1})^2$ *: attention il y a ici rupture de l'équivalence : si deux nombres sont égaux, alors leurs carrés sont également égaux, mais la réciproque est fausse : deux réels qui ont le même carré sont égaux ou opposés !*

Donc $25x^2 = x^2 + 1$ *donc* $24x^2 = 1$ *donc* $x^2 = \frac{1}{24}$ et donc $\left| \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{1}{24}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{4\times6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\sqrt{6}}{12} \end{array} \right.$.

Attention à ne pas conclure ici que l'ensemble des solutions de l'équation de départ est formé des deux réels $\frac{-\sqrt{6}}{12}$ *et* $\frac{\sqrt{6}}{12}$ *!!! On n'a pas procédé par équivalences !*

On a établi que si un réel x est solution de l'équation initiale, alors nécessairement $x \in \{\frac{-\sqrt{6}}{12} ; \frac{\sqrt{6}}{12}\}$.

Réciproquement les réels $\frac{-\sqrt{6}}{12}$ *et* $\frac{\sqrt{6}}{12}$ *sont-ils solution de l'équation :* $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{5}$ *?*

Si $x = \frac{-\sqrt{6}}{12}$*, alors* $x < 0$*, et comme* $\sqrt{x^2+1} > 0$*, on a :* $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ *et par suite* $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \neq \frac{1}{5}$*, donc le réel* $\frac{-\sqrt{6}}{12}$ *n'est pas solution de l'équation initiale.*

Si $x = \frac{\sqrt{6}}{12}$*, alors* $x^2 = \frac{1}{24}$ *et* $x^2 + 1 = \frac{1}{24} + 1 = \frac{25}{24}$ *donc*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{12}}{\sqrt{\frac{25}{24}}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{12}}{\frac{5}{\sqrt{24}}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \times \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{\sqrt{6} \times 2 \times \sqrt{6}}{12 \times 5} = \frac{1}{5}$$

Donc $\frac{\sqrt{6}}{12}$ *est L'UNIQUE solution de l'équation initiale :* $\mathcal{S} = \{\frac{\sqrt{6}}{12}\}$.

Question 16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue b, où a et c sont des réels strictement positifs fixés : $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 0$

Solution : $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{b} = -\frac{1}{a} - \frac{3}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{b} = \frac{-c-3a}{ac} \Leftrightarrow 2ac = b(-c - 3a)$ *[car a, b et c > 0 donc non nuls]*

Si $-c - 3a \neq 0$*, c'est-à-dire si* $c \neq -3a$*, alors* $b = \frac{2ac}{-c-3a} = \frac{-2ac}{c+3a}$.

Si $c = 3a$*, alors* $2ac = b \times 0 = 0$*, ce qui est impossible vu que a et c sont strictement positifs.*

Donc si $c \neq -3a$*, alors* $S = \frac{-2ac}{c+3a}$ *; si* $c = 3a$*, alors* $\mathcal{S} = \varnothing$.

Question 17 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue u, où x est un paramètre fixé différent de -1 : $x = \frac{1+u}{1-u}$

Solution : $x = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow x(1-u) = 1 + u$ *et* $u \neq 1 \Leftrightarrow x - xu = 1 + u$ *et* $u \neq 1 \Leftrightarrow x - 1 = xu + u = u(x+1)$ *et* $u \neq 1 \Leftrightarrow u = \frac{x-1}{x+1}$ *et u est clairement différent de 1 car sinon :* $x - 1 = x + 1$ *et par suite,* $-1 = 1$ *: absurde.*

$\mathcal{S} = \{\frac{x-1}{x+1}\}$

Question 18 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue v, (E, m, g et h sont des paramètres réels strictement positifs) :

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh.$

Solution : $E - mgh = \frac{1}{2}mv^2$, donc, $v^2 = 2\times\frac{E-mgh}{m}$ et donc, comme $v > 0$, on a : $v = \sqrt{\frac{2(E-mgh)}{m}}$.

$\mathcal{S} = \{\sqrt{\frac{2(E-mgh)}{m}}\}$.

Question 19 : Sachant que $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, déterminer l.

Solution : si $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, alors $T^2 = (2\pi\sqrt{\frac{l}{g}})^2 = (2\pi)^2\times\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2 = 4\pi^2\times\frac{l}{g}$.

Donc $l = \frac{gT}{4\pi^2}$.

Question 20 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2(1-x) > 3 + 4x$.

Solution : $2(1-x) > 3 + 4x \Leftrightarrow 2 - 2x > 3 + 4x \Leftrightarrow 2 - 3 > 4x + 2x \Leftrightarrow 6x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{6}$.

$\mathcal{S} =]-\infty \,;\, -\frac{1}{6}[$.

Question 21 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{x}{2} < -\frac{x}{3}$

Solution : $\frac{x}{2} < -\frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} < 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{6} < 0 \Leftrightarrow x < 0$ car $\frac{5}{6} > 0$.

$\mathcal{S} =]-\infty \,;\, 0[$.

Question 22 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{2x+1}{x-4} \geq 1$

Solution : $\frac{2x+1}{x-4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-4} - \frac{x-4}{x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-(x-4)}{x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x-4} \geq 0$.

Attention à ne pas multiplier chacun des deux membres par $x - 4$ car le signe de cette dernière expression est variable.

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+5}{x-4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty \,;\, -5] \cup]4 \,;\, +\infty[$.

Question 23 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x + \frac{1}{x} < 2$.

Solution : $x + \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow$
$\frac{x^2+1}{x} - \frac{2x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} < 0$

Or pour tout réel x, $(x - 1)^2 \geq 0$, donc la précédente inéquation est équivalente à : $x < 0$ en vertu de la règle des signes.

$\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 0[$.

Question 24 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue a, b et c sont des paramètres positifs ou nuls fixés : $\sqrt{2a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$

Solution : $\sqrt{2a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} \Leftrightarrow \sqrt{2a} = \sqrt{c} - \sqrt{b}$

Si $c < b$, alors par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $\sqrt{c} < \sqrt{b}$ et donc $\sqrt{c} - \sqrt{b} < 0$.

Par suite, comme $\sqrt{2a} \geq 0$, l'équation proposée n'a pas de solution lorsque $c < b$: $\mathcal{S} = \varnothing$

Si $c \geq b$, l'égalité $\sqrt{2a} = \sqrt{c} - \sqrt{b}$ implique que $2a = \left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^2$ en élevant au carré chacun de ses membres.

Donc $a = \frac{\left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^2}{2}$. $\mathcal{S} = \{ \frac{\left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \}$.

Question 25 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, où n est un paramètre entier fixé : $3^n = \frac{x}{1-x}$

Solution: $3^n = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow 3^n(1-x) = x$ *et* $x \neq 1 \Leftrightarrow 3^n - 3^n \times x = x$ *et* $x \neq 1 \Leftrightarrow 3^n = x + 3^n \times x = x \times (1 + 3^n)$ *et* $x \neq 1. \Leftrightarrow x = \frac{3^n}{3^n+1}$. *Cette dernière quantité est différente de 1 car sinon* $3^n = 3^n + 1$ *et donc* $0 = 1$ *: absurde.* $S = \{\frac{3^n}{3^n+1}\}$.

Question 26 : Isoler v dans l'expression suivante : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $(0 < v < c)$.

Solution : On a $\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\frac{c^2-v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2-v^2}$. *Donc* $\gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$, *donc* $\gamma^2c^2 - c^2 = \gamma^2v^2$ *donc*

$v^2 = \frac{\gamma^2c^2 - c^2}{\gamma^2} = \frac{c^2(\gamma^2-1)}{\gamma^2}$ *donc comme* $v > 0$ *on a* $v = \sqrt{\frac{c^2(\gamma^2-1)}{\gamma^2}} = \frac{c}{\gamma} \times \sqrt{\gamma^2-1}$ *CAR* $c > 0$, $\gamma > 0$ *et*

$\gamma > 1$: ce dernier point résulte du fait que :$0 < v < c$, donc $0 < \frac{v}{c} < 1$, donc $0 < \frac{v^2}{c^2} < 1$ par croissance de la fonction carrée sur $[0 \ ; \ 1]$, donc $0 < 1 - \frac{v^2}{c^2} < 1$, donc par croissance de la fonction racine carrée sur $[0 \ ; \ 1]$, $0 < \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$, donc γ qui est l'inverse de la quantité précédente, est strictement supérieur à 1 par décroissance de la fonction inverse sur $]0 \ ; \ 1[$.

<u>Question 27</u> *:* Mettre en facteur $2n^3$ dans l'expression : $-n^3 + 5n^2 + 1 \ \ (n \neq 0)$.

Solution : $-n^3 + 5n^2 + 1 = 2n^3 \times \left(\frac{-n^3}{2n^3} + \frac{5n^2}{2n^3} + \frac{1}{2n^3}\right) = 2n^3 \times \left(\frac{-1}{2} + \frac{5}{2n} + \frac{1}{2n^3}\right)$

<u>Question 28</u> *:* Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ \frac{x}{2}+y-4=0 \end{cases}$

Solution :

$$\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ \frac{x}{2}+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ 2x+4y-16=0 \ \ (4\times \mathrm{L}_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ y-11=0 \ \ (\mathrm{L}_2{}' - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=11 \\ x=2(4-y)=2\times(-7)=-14 \end{cases}$$

$\mathscr{S} = \{(-14 \ ; \ 11)\}$.

<u>Question 29</u> *:* Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{4y}=5 \\ \sqrt{9x}-\sqrt{y}=3 \end{cases}$

Solution : Pour que le système admette des solutions, il est déjà nécessaire d'avoir $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{4y}=5 \\ \sqrt{9x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y}=5 \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y}=5 \\ 6\sqrt{x}-2\sqrt{y}=6 \ \ \ (2\times \mathrm{L}_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y}=5 \\ 7\sqrt{x}=11 \ (\mathrm{L}_2{}' + L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\frac{11}{7} \\ \sqrt{y}=\frac{5-\sqrt{x}}{2}=\frac{5-\frac{11}{7}}{2}=\frac{\frac{35}{7}-\frac{11}{7}}{2}=\frac{12}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{121}{49} \ \ (\geq 0) \\ y=\frac{144}{49} \ \ (\geq 0) \end{cases}$$. $\mathscr{S} = \{(\frac{121}{49} \ ; \ \frac{144}{49})\}$.

<u>Question 30</u> *:* Ecrire sous forme d'une puissance de 2 le nombre suivant : $A = 2^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^a \times \left(2^b \times \left(2^b\right)^{-4}\right)^a$

Solution : $A = 2^7 \times 2^{-a} \times 2^{ab} \times 2^{-4ab} = 2^{7-a-3ab}$. [*on rappelle que* $(u \times v)^n = u^n \times v^n$].

Question 31 : Idem avec : $B = 4^5 \times \left(\frac{1}{16}\right)^{-3} \times 8^{-2}$

Solution : $B = (2^2)^5 \times \left(\frac{1}{2^4}\right)^{-3} \times (2^3)^{-2} = 2^{10} \times (2^{-4})^{-3} \times 2^{-6} = 2^{10} \times 2^{12} \times 2^{-6} = 2^{10+12+(-6)} = 2^{16}$.

Question 32 : Expliquer pourquoi si $0 < x < 1$, alors $x > x^3$.

Solution : Si $0 < x < 1$, alors, en multipliant les deux derniers membres de cette inégalité par le même nombre x (ici strictement positif), on a : $x^2 < x$ et en réitérant cette action à la nouvelle inégalité obtenue, il vient que : $x^3 < x^2$.

Ainsi on a : $x^3 < x^2$ et $x^2 < x$, donc par transitivité de la relation $<$, on a : $x^3 < x$.

Question 33 : Réduire l'expression suivante sous forme d'un trinôme en x :

$A = (3 - 4x)^2 + 7(2x + 5)^2 - 2(6x - 1)(6x + 1)$.

Solution : $A = 3^2 - 2\times3\times4x + (4x)^2 + 7\times((2x)^2 + 2\times2x\times5 + 5^2) - 2\times((6x)^2 - 1^2)$.

$A = 9 - 24x + 16x^2 + 7(4x^2 + 20x + 25) - 2(36x^2 - 1) = 16x^2 - 24x + 9 + 28x^2 + 140x + 175 - 72x^2 + 2$
$A = -28x^2 + 116x + 186$.

Question 34 : Ecrire sous forme de fraction irréductible : $A = \dfrac{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times5}{1-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}}$

Solution : $A = \dfrac{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times5}{1-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}} = \dfrac{\frac{3}{2}-\frac{10}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{5}{3}} = \dfrac{\frac{9}{6}-\frac{20}{6}}{\frac{3}{6}+\frac{10}{6}} = \dfrac{\frac{-11}{6}}{\frac{13}{6}} = \frac{-11}{6}\times\frac{6}{13} = \frac{-11}{13}$.

Question 35 : Factoriser au mieux : $A = x^4 - (x-1)^4$.

Solution : $A = (x^2)^2 - ((x-1)^2)^2$ *qui est de la forme* $A^2 - B^2$ *avec* $A = x^2$ *et* $B = (x - 1)^2$

$A = [x^2 + (x-1)^2]\times[x^2 - (x-1)^2] = [x^2 + x^2 - 2x + 1]\times[x^2 - (x^2 - 2x + 1)] = (2x^2 - 2x + 1)(2x - 1)$.

Question 36 : Mettre x en facteur dans l'expression : $A = 3x - x^2 + 4x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$, $x > 0$.

Solution : $A = x\times(3 - x + 4\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x}) = x\times(3 - x + 4\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})$. $[x = \sqrt{x}\times\sqrt{x}$ *car* $x > 0]$.

$$A = x\times\frac{3\sqrt{x} - x\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\times\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} = x\times\frac{3\sqrt{x} - x\sqrt{x} + 4x + 2}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}}\times(4x + (3-x)\times\sqrt{x} + 2)$$
$$A = \sqrt{x}\times(4x + (3-x)\times\sqrt{x} + 2) = 4x\sqrt{x} + x(3-x) + 2\sqrt{x} = -x^2 + 3x + \sqrt{x}\times(4x+2).$$

Question 37 : Simplifier : $\dfrac{\sqrt{2x}}{x+\sqrt{x}}$, avec $x > 0$. Petit caprice de matheux : on ne veut plus de racine au dénominateur…

Solution :

$$\frac{\sqrt{2x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{2}}{\sqrt{x}\times(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+1}.$$

Si $\sqrt{x}-1 \neq 0$ *c'est à dire si* $x \neq 1$ *on a :*

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

Si $x = 1$*, alors le quotient initial vaut* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Question 38 : Simplifier : $A = \frac{\sqrt{36a^2b^4c^6}}{(2abc)^2}$, $a, b, c > 0$.

Solution : $A = \frac{\sqrt{36a^2b^4c^6}}{(2abc)^2} = \frac{\sqrt{36}\times\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^4}\times\sqrt{c^6}}{4\times a^2\times b^2\times c^2} = \frac{6\times|a|\times|b^2|\times|c^3|}{4\times a^2\times b^2\times c^2} = \frac{3\times a\times b^2\times c^3}{2\times a^2\times b^2\times c^2}$ *car a, b et c* > 0.

$A = \frac{3c}{2a}$.

Question 39 : Même question que 38 si on sait seulement que a et c sont de signe contraire ?

Solution : Grâce à la question précédente, on a en tenant compte du fait que $|b^2| = b^2$ *et* $|c^3| = |c^2\times c| = |c^2|\times|c| = c^2\times|c|$*:*

$A = \frac{3\times|c|}{2\times|a|}$. *Vu que a et c sont de signe contraire,* $\frac{c}{a} < 0$*, et comme* $\frac{|c|}{|a|} = \left|\frac{c}{a}\right|$*, on a donc ici* $\left|\frac{c}{a}\right| = -\frac{c}{a}$ *et :*

$A = \frac{-3}{2}\times\frac{c}{a}$.

Question 40 : Calculer mentalement (c'est-à-dire de tête, sans utiliser de stylo !) : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$

Solution : On respecte les priorités ! On calcule : $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2 = \frac{1}{5}$.

Question 41 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution : $2x^2 - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}\times(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ ou \\ x = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{array} \right.$.

$\mathscr{S} = \{ -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \}$.

Question 42 : Réduire à un même dénominateur et simplifier : $A = \dfrac{2x+3}{3x-1} - x + 1$; $B = -\dfrac{x}{2x-1} - 4x - 11$.

Solution : $-x + 1 = 1 - x$. Attention, $-x + 1 \neq -(x+1)$!

$$A = \frac{2x+3}{3x-1} - x + 1 = \frac{2x+3}{3x-1} + (1-x) = \frac{2x+3}{3x-1} + \frac{(1-x)(3x-1)}{3x-1} = \frac{2x+3+3x-1-3x^2+x}{3x-1} = \frac{-3x^2+6x-1}{3x-1}$$

$$B = -\frac{x}{2x-1} - 4x - 11 = \frac{-x}{2x-1} - (4x+11) = \frac{-x}{2x-1} - \frac{(4x+11)(2x-1)}{2x-1} = \frac{-x-(4x+11)(2x-1)}{2x-1}$$

$$B = \frac{-x-(8x^2-4x+22x-11)}{2x-1} = \frac{-x-(8x^2+18x-11)}{2x-1} = \frac{-x-8x^2-18x+11}{2x-1} = \frac{-8x^2-19x+11}{2x-1}$$

Question 43 : Calculer mentalement sous forme simplifiée : $\dfrac{3}{7} \div \dfrac{5}{14}$.

Solution : on calcule mentalement : $\dfrac{3}{7} \times \dfrac{14}{5} = \dfrac{6}{5}$ *(14 est le double de 7…donc simplification mentale).*

Question 44 : a et b sont deux réels positifs et distincts. Ecrire $A = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ sans racine au dénominateur.

Solution : $A = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$.

Question 45 : Sachant que $F = \dfrac{kq_1q_2}{d^2}$, isoler d. (Toutes les grandeurs sont ici strictement positives).

Solution : $d^2 = \dfrac{Kq_1q_2}{F}$ *et donc, comme* $d > 0$ *on a :* $d = \sqrt{\dfrac{Kq_1q_2}{F}}$.

Question 46 : m est un réel différent de 0 et 1. Résoudre l'équation d'inconnue x : $mx - \dfrac{m^2}{m-1} = \dfrac{x}{m} + 1$.

Solution : $mx - \dfrac{x}{m} = 1 + \dfrac{m^2}{m-1} \Leftrightarrow x(m - \dfrac{1}{m}) = \dfrac{m^2+m-1}{m-1} \Leftrightarrow x \times \dfrac{m^2-1}{m} = \dfrac{m^2+m-1}{m-1}$

Or $m^2 - 1 = 0$ si et seulement si $m = -1$ ou $m = 1$.

Vu que le réel m est différent de 0 et 1 on a une discussion :

Si $m \neq -1$, alors $x = \dfrac{m}{m^2-1} \times \dfrac{m^2+m-1}{m-1} = \dfrac{m(m^2+m-1)}{(m+1)(m-1)^2}$. $S = \left\{ \dfrac{m(m^2+m-1)}{(m+1)(m-1)^2} \right\}$..

Si $m = -1$, alors l'équation est équivalente à : $x \times 0 = \dfrac{(-1)^2+(-1)-1}{-1-1} = \dfrac{1}{2}$, donc à $0 = 1$ et n'a donc pas de solution. $S = \varnothing$.

<u>Question 47</u> : a, b et c sont des réels positifs. Résoudre l'équation $\sqrt{2a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$, où a est l'inconnue.

Solution : C'est la même question que 24)…juste pour voir si vous avez fait les questions précédentes !

<u>Question 48</u> : Sachant que $1 \leq x \leq 3$ et que $2{,}5 \leq y \leq 5{,}5$, donner un encadrement de $x+y$; de xy ; de $x-y$; de $\dfrac{x}{y}$.

Solution : rappel sur les opérations licites sur les inégalités :

a, b, c, d, e et f désignent des nombres réels.

R_1 : on peut additionner membre à membre deux inégalités de ***<u>même sens</u>*** *:*

si $a \leq b \leq c$ et si $d \leq e \leq f$, alors : $a + d \leq b + e \leq c + f$. Même règle avec des inégalités strictes.

<u>Remarque</u> : si $a \leq b$ et si $c < d$, alors on a : $a + c < b + d$.

R_2 : Si $0 \leq a \leq b$ et si $0 \leq c \leq d$, alors : $0 \leq ac \leq bd$.

Remarque : les précédentes remarques restent vraies.

Attention, il est interdit de multiplier membre à membre les termes de deux inégalité de même sens lorsque ses termes ne sont pas positifs !!!

Contre-exemple : $-3 \leq 4$ et $-2 \leq 1$ pour autant, $-3 \times (-2) > 4 \times 1$!!!

☞*Si $1 \leq x \leq 3$ et si $2{,}5 \leq y \leq 5{,}5$, alors d'après la règle R_1 : $1 + 2{,}5 \leq x+y \leq 3+5{,}5$ i.e. $\boxed{3{,}5 \leq x+y \leq 8{,}5}$.*

☞*De même, grâce à la règle R_2 ici applicable car x et y sont positifs : $1 \times 2{,}5 \leq xy \leq 3 \times 5{,}5$ i.e. $\boxed{2{,}5 \leq xy \leq 16{,}5}$.*

☞*$x - y = x + (-y)$.*

Or si $2{,}5 \leq y \leq 5{,}5$, alors $-2{,}5 \geqslant -y \geqslant -5{,}5$ ce qui s'écrit encore : $-5{,}5 \leq -y \leq -2{,}5$.

Par suite on a : $1 \leq x \leq 3$ et $-5{,}5 \leq -y \leq -2{,}5$, donc d'après R_1 il vient que : $1 + (-5{,}5) \leq x + (-y) \leq 3 + (-5{,}5)$ c'est-à-dire :

$\boxed{-4{,}5 \leq x - y \leq -2{,}5}$.

☞ $\dfrac{x}{y} = x \times \left(\dfrac{1}{y}\right)$. Or, $(0 <)\ 2{,}5 \leq y \leq 5{,}5$, *donc comme sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction inverse décroît, on a :*

$\dfrac{1}{2{,}5} \geqslant \dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{1}{5{,}5}$ ou encore $(0 <)\ \dfrac{1}{5{,}5} \leqslant \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{2{,}5}$. Comme $1 \leq x \leq 3$, grâce à R_2 on obtient :

$\dfrac{1}{5{,}5} \leqslant x \times \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{3}{2{,}5}$ c'est-à-dire : $\dfrac{1}{5{,}5} \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{3}{2{,}5}$ ou encore, pour plus d'esthétique : $\boxed{\dfrac{2}{11} \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{7}{5}}$.

Question 49 : Sachant que $-3 < x \leq -1$ et que $2{,}6 \leq y < 5{,}1$, encadrer : $x + y$; $x - y$; xy ; $\frac{y}{x}$.

Solution : ☞Grâce à R_1 et aux remarques susmentionnées, on obtient :

$-3 + 2{,}6 < x + y < -1 + 5{,}1$ c'est-à-dire : $\boxed{-0{,}4 < x + y < 4{,}1}$

☞De même, comme $2{,}6 \leq y < 5{,}1$, on déduit en multipliant par -1 chacun des membres de l'inégalité que :

$-2{,}6 \geqslant -y > -5{,}1$ ou encore que : $-5{,}1 < y \leqslant -2{,}6$. Par suite, comme : $-3 < x \leq -1$, on obtient grâce à R_1 :

$-5{,}1 + (-3) < x + (-y) < -2{,}6 + (-1)$ c'est-à-dire : $\boxed{-8{,}1 < x - y < -3{,}6.}$

☞ $-3 < x \leq -1$ donc : $3 > -x \geq 1$ ou encore, $1 \leq -x < 3$, et comme $2{,}6 \leq y < 5{,}1$, en multipliant membre à membre ces deux inégalités de même sens et ne concernant que des nombres positifs, on a :

$2{,}6 \leq -xy < 15{,}3$. Vu que xy est l'opposé de $-xy$, on a, en multipliant par -1 chacun des membres de la précédente inégalité (et donc, en changeant le sens des inégalités) :

Par suite on a : $-2{,}6 \geq xy > -15{,}3$ ce qui se réécrit en : $-15{,}3 < xy \leq -2{,}6$.

☞ On encadre d'abord $\frac{y}{-x}$: or, $1 \leq -x < 3$, donc par décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle [1 ; 3[qui est contenu dans]0 ; +∞[, on a : $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{-x} > \frac{1}{3}$ et de plus, $5{,}1 > y \geq 2{,}6$, donc d'après la règle R_2 on a :

$5{,}1 > \frac{y}{-x} > \frac{2{,}6}{3}$ et par suite, $-5{,}1 < \frac{y}{x} < -\frac{2{,}6}{3}$ ce qui s'écrit encore : $-\frac{51}{15} < \frac{y}{x} < -\frac{13}{15}$.

Question 50 : Sachant que $4 > x > -3$, donner un encadrement de x^2.

Solution : $-3 < x < 4 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -3 < x < 0 \\ ou \\ 0 \leq x < 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 9 > x^2 > 0 \\ ou \\ 0 \leq x^2 < 16 \end{array} \right.$ *car sur]-4 ; 0[, la fonction carrée décroit, et sur [0 ; 3[la fonction carrée croît.*

Par suite on a : $0 \leq x^2 < 16$.

Question 51 : Sachant que $-9 \leq x < 4$, donner un encadrement de $\sqrt{|x+1|}$

Solution : $-9 \leq x < 4$ *donc* $-8 \leq x+1 < 5$, *donc* $0 \leq |x+1| < 8$ *et par croissance de la fonction racine carrée sur [0 ; +∞[il vient que :* $0 \leq \sqrt{|x+1|} < \sqrt{8}$.

Question 52 : x est un réel non nul vérifiant l'égalité : $x + \frac{1}{x} = 3$.

Combien vaut le nombre K, où $K = x^4 + \frac{1}{x^4}$?

Solution : $(x + \frac{1}{x})^2 = 3^2$ *donc* $x^2 + 2\times x\times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 9$ *donc* $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 - 2 = 7$.

De même, $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 7^2$ *donc :* $x^4 + 2x^2\times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 49$ *donc* $K = x^4 + \frac{1}{x^4} = 49 - 2 = 47$.

<u>*Question 53*</u> : Calculer : $A = \dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$.

Solution : $A = \dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = \dfrac{2^{2013} \times (2^1 - 1)}{2^{2012} \times (2^1 - 1)} = \dfrac{2^{2013}}{2^{2012}} = 2^{2013-2012} = 2^1 = 2$

<u>*Question 54*</u> : Quel est le nombre de chiffres de l'écriture décimale du produit : $\left(2^{22}\right)^5 \times \left(5^{55}\right)^2$?

Solution : $\left(2^{22}\right)^5 \times \left(5^{55}\right)^2 = 2^{110} \times 5^{110} = (2 \times 5)^{110} = 10^{110}$ *de sorte que le nombre de chiffres de l'écriture décimale de ce produit est* 111. [10^{110} *s'écrit en base* 10 *avec* 1 *suivi de* 110 *zéros).*

<u>*Question 55*</u> : Pour tout entier $n \geq 1$, l'expression $n\,!$ désigne le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n. On a donc : $n\,! = 1\times 2\times ....\times n$. Calculer $2!$, $3!$, $4!$ et $5!$.

Solution : $2! = 1\times 2 = 2$; $3! = 1\times 2\times 3 = 6$; $4! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$; $5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120$

<u>*Question 56*</u> : Simplifier pour n entier supérieur ou égal à 1 l'expression : $A = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

Solution : Il suffit de constater que (n+1) ! $= 1\times 2\times .....\times n \times (n+1) = n! \times (n+1)$ *de sorte que* $A = \dfrac{n! \times (n+1)}{n!} = n+1$

<u>*Question 57*</u> : Réduire l'expression : $B = (n+1)! - n!$, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Solution : $B = (n+1)! - n! = (n+1)\times n! - n! = n!\times(n+1-1) = n!\times n$.

<u>*Question 58*</u> : Sachant que $A = \dfrac{4^n}{n!}$ et $B = \dfrac{(n+2)!}{2^{n+4}}$, simplifier au mieux $A\times B$.

Solution :

$$A \times B = \frac{4^n}{n!} \times \frac{(n+2)!}{2^{n+4}} = \frac{(2^2)^n}{n!} \times \frac{(n+2)\times(n+1)\times n!}{2^{n+4}} = \frac{2^{2n}}{2^{n+4}} \times (n+2)\times(n+1) = 2^{2n-(n+4)} \times (n+2)\times(n+1) = 2^{n-4} \times (n+2)\times(n+1$$

<u>*Question 59*</u> : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 + x - 3 > 0$.

Solution : Le discriminant associé à ce trinôme est : $\Delta = 25$. *Ce trinôme admet pours racines :* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = -1{,}5$.

Vu que $a = 2$, $a > 0$, *donc les valeurs prises par ce trinômes sont positives hors de l'intervalle* $[-1{,}5 \; ; \; 1]$.

$S =]-\infty \; ; \; -1{,}5[\cup]1 \; ; \; +\infty[$.

<u>*Question 60*</u> : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3\times |5x - 1| = 7$.

Solution : $|5x-1|=\frac{7}{3} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 5x-1=\frac{7}{3} \\ ou \\ 5x-1=\frac{-7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 5x=\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3} \\ ou \\ 5x=\frac{-7}{3}+1=\frac{-4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=\frac{\frac{10}{3}}{5}=\frac{10}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{3} \\ ou \\ x=\frac{\frac{-4}{3}}{5}=\frac{-4}{15} \end{array}\right.$. $\mathscr{S}=\{-\frac{4}{15}\ ;\ \frac{2}{3}\}$.

Question 61 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\lambda^2 = 2\lambda$.

Solution : $\lambda^2 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda=0 \\ ou \\ \lambda=2 \end{array}\right.$. $\mathscr{S}=\{0\ ;\ 2\}$.

Question 62 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-2x^2 + 1 = -71$.

Solution : $-2x^2 + 1 = -71 \Leftrightarrow 1+71 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 72 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=-6 \\ ou \\ x=6 \end{array}\right.$. $\mathscr{S} = \{-6\ ;\ 6\}$.

Question 63 : Soit $A = 2x^2 - 5x + 6$ et $B = -x^2 - x + 4$. Réduire l'expression : $3A - \frac{2B}{3}$.

Solution : $3A - 2B = 3(2x^2 - 5x + 6) - \frac{2}{3}(-x^2 - x + 4) = 6x^2 - 15x + 18 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{20}{3}x^2 - \frac{43}{3}x + \frac{46}{3}$.

Question 64 : Calculer mentalement : $n - \frac{7}{3}n$.

Solution : $-\frac{4n}{3}$ $\quad (n = \frac{3n}{3})$.

Question 65 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{2}{2x-4}-\frac{3}{x+9}=1$

Solution : Nécessairement, $2x - 4 \neq 0$ *et* $x + 9 \neq 0$, *donc* $x \neq 2$ *et* $x \neq -9$.

On cherche donc les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}-\{-9\ ;\ 2\}$ *:*

$\frac{2}{2x-4}-\frac{3}{x+9}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{2(x-2)}=1-\frac{3}{x+9} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2}=\frac{x+9}{x+9}-\frac{3}{x+9} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2}=\frac{x+6}{x+9} \Leftrightarrow 1(x+9)=(x-2)(x+6)$ et $x \notin \{-9\ ;2\}$. $\Leftrightarrow x+9 = x^2 + 6x - 2x - 12$ et $x \notin \{-9\ ;2\}$ $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 21 = 0$ et $x \notin \{-9\ ;2\}$.

$\Delta = 93$ *sans peine, donc cette équation admet deux solutions :* $x_1 = \frac{-3-\sqrt{93}}{2}$ *et* $x_2 = \frac{-3+\sqrt{93}}{2}$. Chacun de ces deux nombres est différent de -9 et 2, donc $\mathscr{S} = \{\frac{-3-\sqrt{93}}{2}\ ;\ \frac{-3+\sqrt{93}}{2}\}$.

Question 66 : Donner mentalement un ordre de grandeur du nombre 20^{13}.

Solution : $20^{13} = (2\times10)^{13} = 2^{13}\times10^{13}$ *et comme* 2^{10} *vaut* 1024, 20^{13} *est de l'ordre de* 8×10^{16} *soit environ* 10^{17}.

Question 67 : x, y et z sont trois réels positifs tels que : $xy = 14$, $yz = 10$ et $zx = 35$. Calculer $x + y + z$.

Solution : xy×yz×zx = 14×10×35 donc (xyz)² = 4900 et comme x y et z sont positifs, il en est de même pour xyz de sorte que xyz =70 et par suite, $x = \frac{xyz}{yz} = \frac{70}{10} = 7$; $y = \frac{xyz}{xz} = \frac{70}{35} = 2$ et $z = \frac{xyz}{xy} = \frac{70}{14} = 5$.

Par suite, x + y + z = 7 + 2 +5 = 14.

Question 68 : Ecrire sous la forme d'une puissance de 2 le nombre $A = 4^{15} + 8^{10}$.

Solution : $4 = 2^2$ *et* $8 = 2^3$ *donc* $A = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \times 2^{30} = 2^{31}$.

Question 69 : Sachant qu'un réel x vérifie : $x^3 < 64 < x^2$, que peut-on dire sur x ?

Solution : $64 < x^2$, *donc* $x > 8$ *ou* $x < -8$. *(le voir graphiquement si nécessaire).*

Si $x > 8$, *alors comme la fonction cube croit sur* $\mathbb{R}$, *on aurait :* $x^3 > 8^3$ *c'est-à-dire* $x^3 > 512$ *: c'est impossible car d'après l'énoncé on doit avoir :* $x^3 < 64$.

Donc nécessairement, $x < -8$ *et on vérifie que si* $x < -8$, $x^3 < 64$.

Si $x < -8$, *alors* $x^3 < (-8)^3$ *car la fonction cube croit sur* $\mathbb{R}$, *donc* $x^3 < -512$ *et* $-512 < 64$, *donc* $x^3 < 64$.

Conclusion : $x < -8$.

Question 70 : Quel est le dernier chiffre non nul de l'entier $A = 2^{59} \times 3^4 \times 5^{53}$.

Solution : $A = 2^{53} \times 2^6 \times 3^4 \times 5^{53} = (2 \times 5)^{53} \times 64 \times 81 = 64 \times 81 \times 10^{53}$

Or 64×81 *a pour chiffre des unités 4, donc le dernier chiffre non nul de A est 4.*

Question 71 : Trouver l'entier n sachant que $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$.

Solution : $9 = 3^2$ *donc* $9^n = (3^2)^n = 3^{2n}$ *et donc,* $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$ *équivaut à :* $3^{2n} + 3^{2n} + 3^{2n} = 3^{2011}$ *c'est-à-dire* $3 \times 3^{2n} = 3^{2011}$ *c'est-à-dire* $3^{2n+1} = 3^{2011}$ *et par suite, on a :* $2n + 1 = 2011 \Leftrightarrow 2n = 2011 - 1 = 2010 \Leftrightarrow n = \frac{2010}{2} = 1005$.

Question 72 : Calculer mentalement : $\dfrac{2014 \times 20{,}14}{201{,}4 \times 2{,}014}$

Solution : 100 (on multiplie le numérateur et dénominateur par 10 ce qui permet une première simplification par 2014 puis $\frac{201{,}4}{2{,}014} = 100$ *par décalage de virgule).*

Question 73 : a, b et c sont des réels. On sait que $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b} = K$. Trouver combien de valeurs différentes peut prendre le nombre K.

Solution : Nécessairement, b et c ne sont pas opposés, a et c ne sont pas opposés, et a et b ne sont pas opposés.

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} \Leftrightarrow a(c+a) = b(b+c) \Leftrightarrow ac + a^2 = b^2 + bc \Leftrightarrow ac - bc + a^2 - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow c(a-b) + (a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(c+a+b) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a-b=0 \\ ou \\ a+b+c=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a=b \\ ou \\ c=-a-b \end{array} \right. .$$

Si c = -a – b, alors $K = \frac{-a-b}{a+b} = -\frac{a+b}{a+b} = -1$.

Si a = b, alors : $K = \frac{c}{2a}$.

En conclusion, lorsque $\frac{c}{2a} \neq 1$*, c'est-à-dire lorsque c* $\neq 2a$*, K prend deux valeurs distinctes.*

Lorsque c = 2a, K prend une unique valeur, la valeur -1.

<u>*Question 74*</u> : x et y sont deux réels non nuls tels que $x + y = 0$. Calculer $\frac{x^{2014}}{y^{2014}}$.

Solution : vu que x +y = 0, on a x = –y et par suite, $\frac{x^{2014}}{y^{2014}} = \frac{(-y)^{2014}}{y^{2014}} = \frac{(-1)^{2014} \times y^{2014}}{y^{2014}} = 1$

<u>*Question 75*</u> : x, y et z sont trois réels non nuls tels que $x + y + z = 1$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Combien vaut $x^2 + y^2 + z^2$?

Solution : Observons que $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$*. Développer* $(x+y+z)\times(x+y+z)$ *pour s'en convaincre.*

Or, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{yz}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{xy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow \frac{xy + xz + yz}{xyz} = 0 \Leftrightarrow xy + xz + yz = 0$ *(vu que xyz est non nul).*

Par suite, de l'identité : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$*, on déduit tenant compte du fait que :* $x + y + z = 1$ *et que* $xy + xz + yz = 0$ *que :*

$1^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\times 0$ *donc* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

<u>*Question 76*</u> : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x + 4\sqrt{x} = 3$.

Solution : Nécessairement, on doit avoir $x \geq 0$*. On fait un changement d'inconnue en posant* $y = \sqrt{x}$.

$$x + 4\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y = 3 \\ \text{et} \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y - 3 = 0 \\ \text{et} \\ y = \sqrt{x} \end{cases}.$$

Les solutions de l'équation du second degré <u>de la variable y</u> sont (calculer $\Delta = 4$*) :* $\begin{cases} y_1 = \frac{-4-\sqrt{4}}{2} = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \\ \text{et} \\ y_2 = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$

Ces deux valeurs trouvées pour l'équation d'inconnue y sont-elles solutions de l'équation initiale ?

Certainement pas, car si $y = \sqrt{x}$*, alors* $y \geqslant 0$*. Ici les deux solutions "potentielles" de l'équation sont négatives !*

Donc l'équation initialement proposée n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \varnothing$.

Question 77 : Simplifier au mieux l'expression suivante : $\dfrac{x^n \times x}{\left(\dfrac{2}{x}\right)^{n-1}}$

Solution : $\dfrac{x^n \times x}{\left(\dfrac{2}{x}\right)^{n-1}} = \dfrac{x^{n+1}}{\dfrac{2^{n-1}}{x^{n-1}}} = x^{n+1} \times \dfrac{x^{n-1}}{2^{n-1}} = \dfrac{x^{2n}}{2^{n-1}}$.

Question 78 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2x}{5}$.

Solution : $x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2x}{5} \Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2x}{5} \Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} - \dfrac{2x}{5} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{15x}{10} - \dfrac{4x}{10} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{11x}{10} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{11} \times \dfrac{1}{6}$

$x = \dfrac{5}{33}$. $\mathscr{S} = \{\dfrac{5}{33}\}$.

Question 79 : $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+x+1}$. Calculer $f(\sqrt{2}+1)$ sous la forme : $a + b\sqrt{2}$, a et b étant des fractions.

Solution :

$f(\sqrt{2}+1)=$

$$\frac{3(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}+1)+1} = \frac{3(2+2\sqrt{2}+1)}{2+2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}} = \frac{(9+6\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})}{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})} = \frac{45-27\sqrt{2}+30\sqrt{2}-36}{25-18} = \frac{9+3\sqrt{2}}{7}$$

Question 80 : Calcul mental : quelle est, sous forme de puissance de 2, la moitié du carré de 2^{10} ?

Solution : On cherche : $\dfrac{(2^{10})^2}{2} = \dfrac{2^{20}}{2} = 2^{19}$

Question 81 : Isoler y sachant que : $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{7} = 1$.

Solution : $\dfrac{y}{7} = 1 - \dfrac{x}{5}$ donc on a : $y = 7(1-\dfrac{x}{5}) = -\dfrac{7x}{5} + 7$.

Question 82 : Sachant que pour tout réel $x \neq 0$, $f(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{x^2+1}{x}$, déterminer l'expression de $f(x)$.

Solution : pour $x \neq 0$*, on a :* $x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}$. *Observons de plus que* $f(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

Donc, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{x} + x = f(x)$ *!*

Question 83 : Déterminer combien vaut $x \times y$ sachant que : $(x-y-1)^2+(x+y+7)^2 = 0$.

Solution : Le carré d'un réel est toujours positif ou nul et la somme de deux termes positifs est positives, donc comme $(x-y-1)^2 \geq 0$ *et* $(x+y+7)^2 \geq 0$*, la relation :* $(x-y-1)^2+(x+y+7)^2=0$ *est équivalente à :*

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = 0 \ (L_1 + L_2) \\ 2y + 8 = 0 \ (L_2 - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$$. $\mathcal{S} = \{(-3\ ;\ -4)\}$

Question 84 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{3}{4x} - 1 = \frac{2}{3x}$

Solution : $x \neq 0$. $\frac{3}{4x} - 1 = \frac{2}{3x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{x} \times \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$. $\mathcal{S} = \{\frac{1}{12}\}$.

Question 85 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$

Solution : $x \neq 0$. $\frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{5} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{40}{20} - \frac{4}{20} - \frac{15}{20} = \frac{21}{20} \Leftrightarrow x = \frac{20}{21}$. $\mathcal{S} = \{\frac{20}{21}\}$.

Question 86 : Soit Φ l'unique nombre positif tel que : $\Phi^2 = \Phi + 1$. Exprimer Φ^5 comme une fonction affine de Φ.

Solution : Vu que $\Phi^2 = \Phi + 1$, on a, en multipliant chacun des deux membres de cette égalité par Φ :

$\Phi^3 = \Phi(\Phi + 1) = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$ (ne pas perdre de vue que $\Phi^2 = \Phi + 1$)!

Or, $\Phi^5 = \Phi^2 \times \Phi^3 = (\Phi + 1) \times (2\Phi + 1) = 2\Phi^2 + \Phi + 2\Phi + 1 = 2\Phi^2 + 3\Phi + 1 = 2(\Phi + 1) + 3\Phi + 1 = 5\Phi + 3$.

Question 87 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}} < 3$.

Solution : pour que l'expression existe, il est nécessaire d'avoir : $x \neq 0$ et : $1 + \frac{1}{x} \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -1$.

On cherche donc les solutions de cette inéquation dans $\mathbb{R}$-{-1 ; 0}.

$$\frac{x}{1+\frac{1}{x}} < 3 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{x+1}{x}} < 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} < 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3(x+1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 3}{x+1} < 0.$$

L'idée est de dresser un tableau de signes.

Le trinôme $x^2 - 3x - 3$ a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 9 + 12 = 21$.

Ce dernier admet pour racines : $x_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$. On a $x_1 < 1 < x_2$.

Vu que a = 1, ce trinôme est donc à valeurs positives lorsque $x \notin \{x_1 ; x_2\}$.

Donc :

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
x^2-3x-3		+	0	-	|	-	0	+	
$x+1$		-	|	-	0	+	|	+	
$\frac{x^2-3x-3}{x+1}$		-	0	+	||	-	0	+	

S = $]-\infty\,;\ \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}[\ \cup\ ]1\,;\ \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}[$.

Question 88 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x| \geq x$.

Solution : vu que $|x|$ est le plus grand des deux réels x et $-x$, on a, pour tout réel x, $|x| \geq x$ (et $|x| \geq -x$).

Donc S =]-∞ ; +∞[.

Question 89 : Soit n et p des entiers tels que $n \geq p$. Simplifier l'expression : $\dfrac{n!}{p!(n-p)!} + \dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$

Solution : Un dénominateur commun est : $(p+1)!(n-p)!$ et $(p+1)! = (p+1)\times p!$ et $(n-p)! = (n-p)\times(n-p-1)!$

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} =$$

$$\frac{n!\times(p+1)}{(p+1)!\times(n-p)!} + \frac{n!\times(n-p)}{(p+1)!\times(n-p)!} = \frac{n!\times(p+1+n-p)}{(p+1)!\times(n-p)!} = \frac{n!\times(n+1)}{(p+1)!\times(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\times(n-p)!}$$

Question 90 : Etablir que pour tous réels x et y, on a : $xy = \dfrac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$.

Solution : $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ et $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

donc $\frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2) = \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)) = \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2) = \frac{1}{4}\times 4xy = xy$.

Question 91 : Sachant que pour tout réel x, $f(x) = x^2 + 2x - 3$, calculer $f(f(x))$ sous forme simplifiée au mieux.

Solution : $f(x) = x^2 + 2x - 3$, donc $f(f(x)) = (x^2 + 2x - 3)^2 + 2(x^2 + 2x - 3) - 3$.

$f(f(x)) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 3 + 2) - 3 = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 1) - 3 = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x^3 - 2x - 3x^2 - 6x + 3 = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 8x + 3$.

Question 92 : Sachant que pour tout réel x, $f(x) = 4x^2 - 2x + 5$, que vaut $f(3x)$? $f(\frac{x}{4})$? $f(-x)$?

Solution : $f(3x) = 4\times(3x)^2 - 2\times 3x + 5 = 36x^2 - 6x + 5$.

$$f\left(\frac{x}{4}\right) = 4\times\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 2\times\frac{x}{4} + 5 = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 5.$$

$$f(-x) = 4(-x)^2 - 2(-x) + 5 = 4x^2 + 2x + 5$$

Question 93 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(|x| + x)(x - |x|) = 1$

Solution : Vu que $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$, on a : Si $x \geq 0$, $|x| - x = 0$ et donc, $(|x| - x)(|x| + x) = 0$ et de même, si

Si $x \leq 0$, $|x| + x = 0$ et donc, $(|x| - x)(|x| + x) = 0$.

En conclusion, pour tout réel x, on a : $(|x| + x)(x - |x|) = 0$.

L'équation initialement proposée n'a donc aucune solution réelle. $\mathcal{S} = \varnothing$

Question 94 : Factoriser sous la forme d'un produit de deux trinômes l'expression : $X^4 + 1$.

Solution : $X^4 + 1$ contient deux des trois termes de l'expression développée de $(X^2+1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1$.

Donc $X^4 + 1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,X)^2 = (X^2 + 1 - \sqrt{2}\,X)(X^2 + 1 + \sqrt{2}\,X)$ (ah les identités remarquables....).

$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}\,X + 1)(X^2 - \sqrt{2}\,X + 1)$.

Question 95 : Soit x et y des réels strictement supérieurs à 1 tels que : $\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}$. Prouver que $x = y$.

Solution : Vu que $1 + x^2$ et $1 + y^2$ ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2} \Leftrightarrow x(1+y^2) = y(1+x^2) \Leftrightarrow x + xy^2 = y + yx^2 \Leftrightarrow x - y = yx^2 - xy^2 = xy(x-y) \Leftrightarrow$$

$(x-y) - xy(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(1-xy) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ou $xy = 1$.

Or, $x > 1$ et $y > 1$, donc $xy > 1$, et donc il est impossible d'avoir $xy = 1$.

Par suite, $x = y$.

Question 96 : Démontrer que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d > 0)$, alors $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} = \sqrt{(a+b)(c+d)}$.

Solution : Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors on a : $ad = bc$. Les deux termes $\sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ et $\sqrt{(a+b)(c+d)}$ étant positifs, pour prouver qu'ils sont égaux, il suffit d'établir qu'ils ont le même carré.

Or, $(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 = ac + 2\sqrt{abcd} + bd$ et vu que $ad = bc$, on a : $(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 = ac + 2\sqrt{b^2c^2} + bd = ac + 2bc + bd$ car b et c sont strictement positifs.

De même, $(\sqrt{(a+b)(c+d)})^2 = (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd = ac + 2bc + bd$ car on a : $ad = bc$.

Ainsi, $(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 = (\sqrt{(a+b)(c+d)})^2$, et par suite on a bien l'identité voulue.

Question 97 : Démontrer que pour tous réels x et y, $(x + y)^2 \geq 4xy$.

Solution : $(x+y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$. Or le carré de tout réel est supérieur ou égal à 0, donc on a, pour tout réel x et y, $(x+y)^2 - 4xy \geq 0$ et par suite : $(x+y)^2 \geq 4xy$.

Question 98 : Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Solution : Si l'un des deux réels a ou b est nul, on a égalité.

On suppose donc $a > 0$ et $b > 0$.

Or, $$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = (\sqrt{a+b} - \sqrt{a}) \times \frac{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a})} = \frac{(\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}} = \frac{a+b-a}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}} = \frac{b}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}.$$

La quantité $\sqrt{a+b} + \sqrt{a}$ par laquelle on multiplie est non nulle du fait que $a > 0$ et $b > 0$.

Or, b + a >b et par stricte croissance de la fonction racine carrée sur]0 ; +∞[, $\sqrt{a+b} > \sqrt{b}$ *, donc,*

$\sqrt{a+b} + \sqrt{a} > \sqrt{b} + \sqrt{a} > \sqrt{b}$ car $\sqrt{a} > 0$*, et par suite comme la fonction inverse décroit strictement sur]0 ; +∞[,*

on a : $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}} < \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ *et donc, en multipliant chacun des membres par b >0, on a :* $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}} < \dfrac{b}{\sqrt{b}}$ *bref,*

$\dfrac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}} < \sqrt{b}$*. Par suite, on a établi que :* $\sqrt{a+b} - \sqrt{a} < \sqrt{b}$*, et donc afortior i que* $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Question 99 : On suppose que a, b, c, d sont des réels, avec a et b distincts d'une part, et c et d distincts d'autre part. Démontrer que si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$.

Solution : Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$*, alors on a : ad = bc (règle des produits en croix).*

Vu que a et b sont distincts, a − b ≠ 0 et de même, c et d sont distincts, donc c − d ≠ 0.

(#) Prouver que $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$ *équivaut donc à prouver que : (a + b)(c − d) = (a − b)(c + d).*

Or, (a + b)(c − d) = ac − ad + bc − bd, et par hypothèse ad = bc, donc : (a + b)(c − d) = ac − bd.

De même, (a − b)(c + d) = ac + ad − bc − bd, et comme ad = bc, on a : (a − b)(c + d) = ac − bd.

Par suite, (a + b)(c − d) = (a − b)(c + d) [deux nombres égaux à un même troisième sont égaux].

Grâce à (#), on a bien prouvé que $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$.

Question 100 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$.

Solution :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6 & (L_1) \\ x^2 + y^2 = 12 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 & (L_1 + L_2) \\ 2y^2 = 6 & (L_2 - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-3\,;3\} \text{ et } y \in \{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}.$$

$\mathcal{S}$ *= { (-3 ; -*$\sqrt{3}$ *) ; (-3 ;* $\sqrt{3}$ *) ; (3 ; -*$\sqrt{3}$ *) ; (3 ;* $\sqrt{3}$ *)}.*

Prolongation : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{1}{x} \leq 1$.

Solution : $\dfrac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} \leq 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		+	|	+	0	-	
x		-	0	+	|	+	
$\dfrac{1-x}{x}$		-	||	+	0	-	

$\mathcal{S}$ =]-∞ ; 0[∪ [1 ; +∞[.

simplifier $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{x^2}{x^6}$, $4\sqrt{x}-\dfrac{4x}{2\sqrt{x}}$