BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1) $f(2e) = 2e\ln\left(\dfrac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e\ln e - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{B} \in \mathscr{C}_f$.

$f(2) = 2\ln\left(\dfrac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 2\ln 1 - 2 + 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{I} \in \mathscr{C}_f$.

Si l'axe (Ox) est tangent à $\mathscr{C}_f$ en I alors $f'(2) = 0$.

$f'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\frac{x}{2}} - 1 = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + 1 - 1 = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f'(2) = \ln\left(\dfrac{2}{2}\right) = \ln 1 = 0.$

L'axe (Ox) est bien tangent à $\mathscr{C}_f$ en I.

2) a) Une équation de la droite (T) est de la forme : $y = f(x_{\mathrm{B}})(x - x_{\mathrm{B}}) + f(x_{\mathrm{B}})$.

(T) : $y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e) \quad\Leftrightarrow\quad y = \ln e(x - 2e) + 2 \quad\Leftrightarrow\quad y = x - 2e + 2$.

D est le point de (T) d'ordonnée nulle donc : $x_{\mathrm{D}} - 2e + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_{\mathrm{D}} = 2e - 2$.

Le point D a comme coordonnées : D$(2e - 2\,;0)$.

b) $\mathscr{A}(\mathrm{ABC}) = \dfrac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AI}}{2} = \dfrac{(2e-2) \times 2}{2} = 2e - 2$.

$\mathscr{A}(\mathrm{AIDB}) = \dfrac{(\mathrm{AB} + \mathrm{ID}) \times \mathrm{AI}}{2} = \dfrac{(2e - 2 + 2e - 2 - 2) \times 2}{2} = 4e - 6 \approx 4,874$.

On a alors : $2e - 2 \leqslant \mathcal{S} \leqslant 4e - 6$.

Le volume $V = 5\mathcal{S}$ est alors : $10e - 10 \leqslant V \leqslant 20e - 30 \quad\Rightarrow\quad 17,182 \leqslant V \leqslant 24,366$

3) a) $G'(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2} = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2} = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

G est donc une primitive de g.

b) $F(x) = G(x) - \dfrac{x^2}{2} + 2x = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^2}{2} + 2x = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{3x^2}{4} + 2x$.

c) $\mathcal{S} = \displaystyle\int_2^{2e} (2 - f(x))\,\mathrm{d}x = \big[2x - F(x)\big]_2^{2e} = 4e - F(2e) - 4 + F(2) = 4e - 4 - F(2e) + F(2)$.

$F(2e) = \dfrac{4e^2}{2}\ln e - \dfrac{3 \times 4e^2}{4} + 4e = 2e^2 - 3e^2 + 4e = -e^2 + 4e$.

$F(2) = \dfrac{4}{2}\ln 1 - \dfrac{3 \times 4}{4} + 4 = 1$.

On a alors $\mathcal{S} = 4e - 4 + e^2 - 4e + 1 = e^2 - 3 \quad\Rightarrow\quad V = 5e^2 - 15 \approx 21,945$.

Le volume de la cuve au m^3 près est de 22 m^3.

Partie B

1) $\forall x \in [2\,;\,2e]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$, donc la fonction f est croissante sur $[2\,;\,2e]$.
De plus $f(2) = 0$ et $f(2e) = 2$

Sur $[2\,;\,2e]$ la fonction f est continue car dérivable, monotone car croissante et $1 \in [f(2)\,;\,f(2e)]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0.

$$v(4,311) = 5\left[\frac{4,311^2}{2}\ln\left(\frac{4,311}{2}\right) - 2\times 4,311\ln\left(\frac{4,311}{2}\right) - \frac{4,311^2}{4} + 2\times 4,311 - 3\right] \approx 7,453$$

Le volume, au m^3 près, correspondant à une hauteur de 1 m d'eau est de 7 m^3.

2) Cet algorithme calcule, à 10^{-3} près, par la méthode de dichotomie, la hauteur d'eau dans la cuve pour un remplissage à moitié de la capacité totale.

En rentrant le programme, on trouve une hauteur de 1,283 m.

EXERCICE 2 (5 points)

1) a) $p(T \geqslant 140) = \text{NormalFRép}(140\ ,\ 1\text{E}99\ ,\ 165\ ,\ 20) = 0,8944$.

b) $p(10 \leqslant X \leqslant 70) = \text{NormalFRép}(10\ ,\ 70\ ,\ 30\ ,\ 17) = 0,8710$.

c) On appelle T l'événement « la personne a la taille requise » et X, l'événement « la personne a l'âge requis ».

On a alors les données suivantes : $p(T) = 0,89$, $p(X) = 0,87$ et $p(\overline{T}\cap\overline{X}) = 0,08$.

La proportion des personnes vérifiant les conditions d'accès est donnée par $p(T\cap X)$.

- Par la loi de Morgan :

$$p(T\cap X) = 1 - p(\overline{T\cap X}) \overset{\text{Morgan}}{=} 1 - p(\overline{T}\cup\overline{X}) \overset{\text{Proba union}}{=} 1 - p(\overline{T}) - p(\overline{X}) + p(\overline{T}\cap\overline{X})$$
$$= 1 - (1-0,89) - (1-0,87) + 0,08 = 0,89 + 0,87 + 0,08 - 1 = 0,84$$

- Par un tableau double entrée : on retrouve $p(T\cap X) = 0,84$

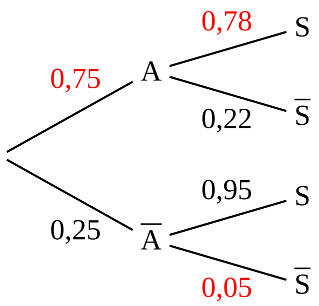
	T	$\overline{T}$	Total
X	0,84	0,03	0,87
$\overline{X}$	0,05	0,08	0,13
Total	0,89	0,11	1

Il y a donc 84 % de personnes vérifiant les conditions d'accés.

2) a) $p(\overline{\text{A}}) = 0,25$, $p_{\overline{\text{A}}}(\text{S}) = 0,95$,

$p_{\text{A}}(\overline{\text{S}}) = 0,22$.

On obtient l'arbre suivant :



$$p(\text{S}) = p(\text{A}\cap\text{S}) + p(\overline{\text{A}}\cap\text{S}) = p(\text{A})\times p_{\text{A}}(\text{S}) + p(\overline{\text{A}})\times p_{\overline{\text{A}}}(\text{S})$$
$$= 0,75\times 0,78 + 0,25\times 0,95 = 0,8225$$

b) $p_{\overline{\text{S}}}(\overline{\text{A}}) = \dfrac{p(\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{S}})}{p(\overline{\text{S}})} = \dfrac{p(\overline{\text{A}})\times p_{\overline{\text{A}}}(\overline{\text{S}})}{1-p(\text{S})} = \dfrac{0,25\times 0,05}{1-0,8225} \approx 0,0704$

EXERCICE 3 (5 points)

1) $Z = \dfrac{1-i}{8(-1-\sqrt{3}\,i)} = \dfrac{(1-i)(-1+\sqrt{3}\,i)}{8(1+3)} = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i+i+\sqrt{3}}{32} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{32} + i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{32}$.

2) $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$|z_2| = 8\sqrt{1+3} = 16$ et $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

$z_1 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 16\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

3) $Z = \dfrac{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{16\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\,e^{i\,\frac{5\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{16}\sin\dfrac{5\pi}{12}$

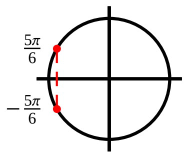
4) En identifiant les parties réelles des formes algébriques et trigonométrique de Z, on obtient :

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{32} = \frac{\sqrt{2}}{16}\cos\frac{5\pi}{12} \overset{\times 16}{\Leftrightarrow} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \overset{\times\sqrt{2}}{=} \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

5) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3} \overset{\div 4}{\Leftrightarrow} \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos x - \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{5\pi}{12}\cos x - \sin\dfrac{5\pi}{12}\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\dfrac{5\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{6}$

On obtient les solutions suivantes sur $\mathbb{R}$:



$$\begin{cases} x+\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x+\dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{15\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \overset{-\frac{5\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

A Questions préliminaires

1) On rappelle que $\int u'e^u = e^u$.

On a alors : $\displaystyle\int_0^a \lambda\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_0^a -(-\lambda)\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\lambda\,e^{-\lambda t}\right]_0^a = -e^{-\lambda a}+1$

On en déduit que : $p(T \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a} \Rightarrow p(\mathrm{T} > a) = 1 - p(T \leqslant a) = e^{-\lambda\,a}$.

2) La loi exponentielle est une loi sans mémoire, cela signifie que la probabilité, à tout moment t, que la durée de vie augmente de h est la même.

$$p_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = p(T \geqslant h)$$

B Application

1) a) $E(\mathrm{D}_1) = \dfrac{1}{0,6} = \dfrac{5}{3} \approx 1,67$.

La durée d'attente moyenne est d'environ 1, 67 minutes.

b) $p(\mathrm{D}_1 < 5) = 1 - e^{-0,6\times 5} = 1 - e^{-3} \approx 0,950.$

La probabilité qu'un client attende moins de 5 minutes est de 0,950.

2) a) $p\,(\mathrm{D}_2 \leqslant 4) = 0,798 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-4\lambda} = 0,798 \;\; e^{-4\lambda} = 0,202 \quad \Leftrightarrow \quad -4\lambda = \ln(0,202) \quad \Leftrightarrow$

$\lambda = -\dfrac{\ln(0,202}{4} \approx 0,400$

b) $p\,(\mathrm{D}_2 > 5) = e^{-0,4\times 5} = e^{-2} \approx 0,135$

La probabilité qu'un client attende plus de 5 minutes est de 13,5 %. On ne peut donc pas considérer qu'il y a moins de 10 %.

c) $p_{\mathrm{D}_2 \geqslant 3}(\mathrm{D}_2 \geqslant 3 + 2) = p(\mathrm{D}_2 \geqslant 2) = e^{-0,4\times 2} = e^{-0,8} \approx 0,449$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) a) $\begin{cases} 10x + 15y + 6z = 73 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 10x + 15y + 18 = 73 \Leftrightarrow 10x + 15y = 55 \overset{\div 5}{\Leftrightarrow} 2x + 3y = 11.$

b) $2 \times 7 + 3 \times (-1) = 14 - 3 = 11$ donc le couple $(7\,;-1)$ est une solution particulière de (E).

Soit (x, y) une solution quelconque de (E) et $(7\,;-1)$ une solution particulière, on a alors :

$$2x + 3y = 11$$
$$2(7) + 3(-1) = 11$$

En soustrayant termes à termes, on obtient la relation :

$$2(x-7) + 3(y+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-7) = 3(-y-1) \quad (E').$$

3 divise alors $2(x-7)$, comme 3 et 2 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $(x-7)$. On a alors : $x - 7 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant de (E'), on obtient : $-y - 1 = 2k$.

L'ensemble des couples solutions de (E) sont de la forme : $\begin{cases} x = 7 + 3k \\ y = -1 - 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

c) L'ensemble des couples, solutions de (E) appartenant à $\mathbb{N}^2$, doivent vérifiés :

$$\begin{cases} 7 + 3k \geqslant 0 \\ -1 - 2k \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant -\dfrac{7}{3} \\ k \leqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant -2 \\ k \leqslant -1 \end{cases}$$

Deux valeurs de k conviennent $k = -2$ et $k = -1$, ce qui donne les couples (1,3) et (4,1).

2) a) Si l'on raisonne modulo 2, on a : $10x \equiv 0\ [2]$, $6z \equiv 0\ [2]$, $73 \equiv 1\ [2]$

La relation devient alors : $15y \equiv 1\ [2] \overset{15\equiv 1\ [2]}{\Rightarrow} y \equiv 1\ [2]$. y est donc impair.

b) Si l'on raisonne modulo 3, on a : $15y \equiv 0\ [3]$, $6z \equiv 0\ [3]$, $73 \equiv 1\ [3]$

La relation devient alors : $10x \equiv 1\ [3] \overset{10\equiv 1\ [3]}{\Rightarrow} x \equiv 1\ [3]$.

Si l'on raisonne modulo 5, on a : $10x \equiv 0\ [5]$, $15y \equiv 0\ [5]$, $73 \equiv 3\ [5]$

La relation devient alors : $6z \equiv 3\ [5] \overset{6\equiv 1\ [5]}{\Rightarrow} z \equiv 3\ [5]$.

c) On remplace dans l'équation du plan :

$$10x + 15y + 6z = 73 \quad \Leftrightarrow \quad 10(1+3p) + 15(1+2q) + 6(3+5r) = 73 \quad \Leftrightarrow$$
$$10 + 30p + 15 + 30q + 18 + 30r = 73 \quad \Leftrightarrow \quad 30(p+q+r) = 30 \overset{\div 30}{\Leftrightarrow}$$
$$p + q + r = 1$$

d) Comme p, q et r sont des entiers naturels, les seuls triplets possibles pour (p, q, r) sont : (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1).

Les points correspondants sont alors : (4,1,3), (1,3,3), (1,1,8).

Remarque : on retrouve bien avec les deux premiers points les couples solutions de la question 1) c)