BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

- *Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité.*
- *La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (5 points)

Les trois parties sont indépendantes.

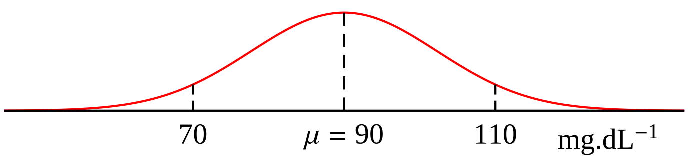
Partie 1 *Les résultats des probabilités seront arrondis à* 10^{-3} *près.*

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
R l'événement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
D l'événement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2) a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.
   b) La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

Partie 2 *Les résultats des probabilités seront arrondis à* 10^{-3} *près.*

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg. dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.rdL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0,052$.
On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1) Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?
2) Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.
3) Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3 *Les résultats des probabilités seront arrondis à* 10^{-4} *près.*

La durée de vie en heures d'une ampoule est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

1) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
2) Calculer la probabilité $P(T \geqslant 5\,000)$.
3) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

EXERCICE 2 (5 points)

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25^\circ$C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100^\circ$C.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85˚C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

1) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice puis donner la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes puis de 5 minutes. Arrondir à l'unité.
2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3) Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Variables : n,i : entiers T : réel
Entrées et initialisation
  T prend la valeur 25
  Demander la valeur de n
Traitement
  pour i allant de 1 à n **faire**
    T prend la valeur $0,85 \times T + 15$
  fin
Sorties : Afficher : T

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75\, e^{-\frac{\ln 5}{10} t}.$$

1) a) Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b) Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.
2) Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
   On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, , $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f. Ainsi $\mathscr{A}(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} [f(t) - 85]\,\mathrm{d}t$
   On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80. .
   a) Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $\mathscr{A}(25) > 80$. (On pourra raisonner à l'aide des rectangles tracés sur l'annexe)
   b) Trouver une primitive de la fonction g définie par : $g(t) = f(t) - 85$.
   c) Calculer $\mathscr{A}(20)$. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

EXERCICE 3 (5 points)

1) Déterminer la forme exponentielle $a = \sqrt{3} - 3i$
2) On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.
   a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer, au vu des questions précédentes, pour les valeurs prises par z_{3n}, $n \in \mathbb{N}$?

Prouver cette conjecture par récurrence.

d) Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.

e) Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en **milliers**. dans cette population au bout du n-ième jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.
En d'autres termes, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\,(u_{n+1} - u_n)$.

1) Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{V}_n$.

   On admet alors que, pour tout entier naturel n, : $\mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{V}_0$.

   b) On pose $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que la matrice $\mathbf{P}$ est inversible puis déterminer la matrice $\mathbf{P}^{-1}$.

   c) En détaillant les calculs, déterminer la matrice $\mathbf{D}$ définie par $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

   d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$.

   Pour tout entier naturel n, on admet que : $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}$.

   e) En déduire que, pour tout entier naturel n, : $u_n = 6 - 0,9^n$.

3) Calculer la taille de la colonie au bout du 10e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4) Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.

Annexe exercice 2