Lycée Municipal d'Adultes de la ville de Paris — Mardi 26 avril 2016

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

Soit (v_n) la suite définie par : $v_1 = \ln(2)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-v_n}\right)$.

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.

On définit ensuite la suite (S_n) pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1) Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables : n, k : entiers
    S, v : réel
Entrées et initialisation
    Saisir la valeur de n
    v prend la valeur ...
    S prend la valeur ...
Traitement
    pour k variant de ... à ... **faire**
        ... prend la valeur ...
        ... prend la valeur ...
    fin
Sorties : Afficher S

2) À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$.

1) Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.
2) Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (Sn)

1) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.
2) Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1) Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2) Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4) Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

EXERCICE 3 (4 points)

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1) Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2) On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet évènement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à $0,97$.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents :
le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.
On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'événement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'événement « la fève est conforme ».

1) Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.
2) Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes.
Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

EXERCICE 4 (2 points)

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On donne $E(X) = 2$

1) Que représente la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
2) Calculer la valeur de λ.
3) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,001$ près. Interpréter ce résultat.
4) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,001 près.

EXERCICE 5 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :
- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :
- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$,
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1) On considère les matrices $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.
   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{U}_n$.
   b) Calculer $\mathbf{U}_1$. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.
2) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $\mathbf{U}_n$ en fonction de $\mathbf{M}^n$ et de $\mathbf{U}_0$.
3) Soit la matrice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $\mathbf{P}$, et on la notera $\mathbf{P}^{-1}$.
4) a) On pose $\Delta = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.
   b) Démontrer que : $\mathbf{M} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $\mathbf{M}^n = \mathbf{P}\Delta^n\mathbf{P}^{-1}$.
5) a) On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}.$$

   En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?
6) a) On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante.
   Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.
   b) En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme.

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 5
(À rendre avec la copie)
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Variables : n, R, C : réels
Entrées et initialisation
  n prend la valeur 0
  R prend la valeur 90
  C prend la valeur 30
Traitement
  tant que ...... **faire**
    n prend la valeur ...
    R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$
    C prend la valeur ...
  fin
Sorties : Afficher n