BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

obligatoire et spé

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1) On obtient l'algorithme suivant :

```
Variables : n, k : entiers
            S, v : réel
Entrées et initialisation
   Saisir la valeur de n
   v prend la valeur ln 2
   S prend la valeur ln 2 ou v
Traitement
   pour k variant de 2 à n ou de 1 à n − 1 faire
      v prend la valeur ln(2 − e^(−v))
      S prend la valeur S + v
   fin
Sorties : Afficher S
```

2) D'après le tableau de valeurs, la suite (S_n) est croissante et ne semble pas converger vers une limite finie. En effet entre les termes 100 000 et 1 000 000 la suite ne semble pas se stabiliser.

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

1) $u_1 = e^{\ln 2} = 2$ et $u_{n+1} = e^{\ln(2-e^{-v_n})} = 2 - e^{-v_n} = 2 - \dfrac{1}{e^{v_n}} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

2) $u_2 = 2 - \dfrac{1}{u_1} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = 2 - \dfrac{1}{u_2} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$, $u_4 = 2 - \dfrac{1}{u_3} = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$

3) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Initialisation : $u_1 = 2 = \dfrac{2}{1}$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Supposons que $u_n = \dfrac{n+1}{n}$, montrons que $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$.

On a : $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$, or par hypothèse $u_n = \dfrac{n+1}{n}$, on a donc :

$$u_{n+1} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1)-n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

Partie C – Étude de (Sn)

1) On a $v_n = \ln u_n = \ln \dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$.

2) $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 = 2\ln 2$.

3) S_n est une suite télescopique, en effet :

$$\begin{aligned}
v_1 &= \cancel{\ln 2}\\
v_2 &= \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}\\
v_3 &= \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3}\\
\dots &= \cancel{\dots} - \cancel{\dots}\\
v_n &= \ln(n+1) - \cancel{\ln n}\\
&-----------\\
S_n &= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, la suite (S_n) diverge donc vers $+\infty$

EXERCICE 2 (4 points)

1) Si M(z) est invariant alors : $z' = z \Leftrightarrow z^2 + 4z + 3 = z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0$

$\Delta = 9 - 12 = -3 = (i\sqrt{3})^2$, $\Delta < 0$ l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$$

Il existe donc deux points invariants d'affixes respectives z_1 et z_2

$$|z_1| = \frac{9+3}{4} = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_1 = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{5\pi}{6} \ [2\pi]$$

On a alors : $z_1 = \sqrt{3}\, e^{\frac{5\pi}{6}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3}\, e^{-\frac{5\pi}{6}}$

2) $\text{OA} = |z_\text{A}| = |z_2| = \sqrt{3}$

$\text{OB} = |z_\text{B}| = |z_1| = \sqrt{3}$

$$\text{AB} = |z_\text{B} - z_\text{A}| = \left|\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} - \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{-3 + i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}}{2}\right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$\text{OA} = \text{OB} = \text{AB} = \sqrt{3}$, le triangle OAB est équilatéral.

3) M' est sur l'axe des réels si, et seulement si $z' = \overline{z'}$, on a alors :

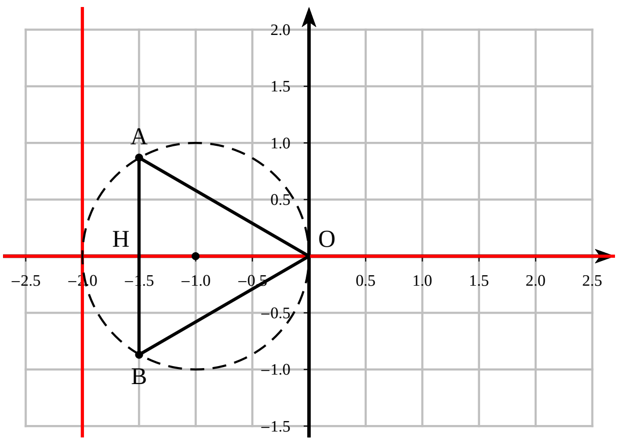
$z^2 + 4z + 3 = \overline{z^2} + 4\overline{z} + 3 \Leftrightarrow (z^2 - \overline{z}^2) + 4(z - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z}) + 4(z - \overline{z}) = 0$

Si $z = x + iy$, alors $(z - \overline{z}) = 2iy$ et $(z + \overline{z}) = 2x$, l'équation devient alors :

$(2iy)(2x) + 4(2iy) = 0 \Leftrightarrow 4ixy + 8iy = 0 \Leftrightarrow 4iy(x+2) = 0$

On obtient alors $y = 0$ ou $x = -2$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est alors l'union des droites d'équations respectives : $y = 0$ (l'axe des abscisses) et $x = -2$ (droite verticale)

4) Pour placer A et B à la règle et au compas. On sait que l'ordonnée des points A et B est $-1,5$, comme OAB est équilatéral, le centre du cercle circonscrit se trouve à une distance de 2/3 entre O et le pied H de la hauteur issue de O. On a alors H(-1 ; 0). Les points A et B sont alors les intersections entre le cercle circonscrit et la droite d'équation $x = -1,5$



EXERCICE 3 **(4 points)**

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

1) Pour que la tablette soit mise sur le marché, on doit avoir :
$P(98 \leqslant X \leqslant 102) = \text{NormaleFrép}(98, 102, 100, 1) \approx 0,954$ (intervalle de rayon 2σ).

2) On revient à la loi normale centrée réduite. On pose : $Z = \dfrac{X - 100}{\sigma}$.

$$P(98 \leqslant X \leqslant 102) = P\left(\frac{98-100}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{102-100}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0,97$$

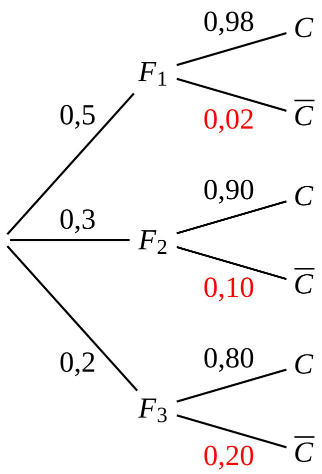
D'après le théorème sur l'intervalle centrée en μ : $P\left(Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 1 - \dfrac{1-0.97}{2} = 0,985$

On a alors : $\dfrac{2}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,985) \approx 2,17 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \approx \dfrac{2}{2,17} \approx 0,92$ à 10^{-2} près.

Partie B Contrôle à la réception

1) $P(F_1) = 0,5$, $P(F_2) = 0,3$ et $P(F_3) = 0,2$.
$P_{F_1}(C) = 0,98$, $P_{F_2}(C) = 0,90$ et $P_{F_3}(C) = 0,80$.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(F_1 \cap C) + P(F_2 \cap C) + P(F_3 \cap C) \\ &= P(F_1)P_{F_1}(C) + P(F_2)P_{F_2}(C) + P(F_3)P_{F_3}(C) \\ &= 0,5 \times 0,98 + 0,3 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8 \\ &= 0,92 \end{aligned}$$

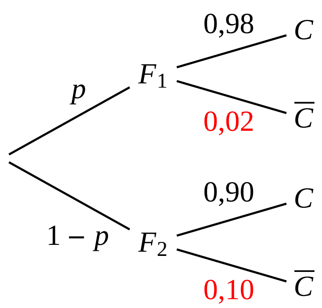


$$P_C(F_1) = \frac{P(F_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,5 \times 0,98}{0,92} \approx 0,53$$

La probabilité que la fève provienne de F_1, sachant qu'elle est conforme est de 0,53 à 10^{-2} près

2) On peut refaire un arbre avec deux fournisseur :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(F_1 \cap C) + P(F_2 \cap C) \\ &= P(F_1)P_{F_1}(C) + P(F_2)P_{F_2}(C) \\ &= p \times 0,98 + (1-p) \times 0,9 \\ &= 0,98p + 0,9 - 0,9p = 0,08p + 0,9 \end{aligned}$$



$P(C) = 0,92 \quad \Leftrightarrow \quad 0,08p + 0,9 = 0,92 \quad \Leftrightarrow$

$0,08p = 0,02 \quad \Leftrightarrow \quad p = \dfrac{0,02}{0,08} = 0,25$

La proportion de fèves que l'entreprise doit acheter à F_1 est de 25 %

EXERCICE 4 (2 points)

1) L'espérance mathématique $E(X)$ représente la durée de vie moyenne en années du composant électronique soit ici 2 ans.

2) $E(X) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\lambda} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \dfrac{1}{E(X)} = 0,5$

3) $P(X \leqslant 2) = 1 - e^{-0,5\times 2} = 1 - e^{-1} \approx 0,632$ à 10^{-3} près.

   63,2 % des composants ont une durée de vie inférieure ou égale à 2 ans.

4) $P_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3) = P(X \geqslant 3-1) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - 0,632 = 0,368$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 5 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) $f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)\,e^{-x}$

   Sur $[0\,;\ +\infty[$
   - $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$
   - Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(1-x)$ car $e^{-x} > 0$

   En conséquence sur $[0\,;\ +\infty[$:
   - Si $x < 1$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est croissante.
   - Si $x > 1$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante.

2) $f(x) = x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^{-x}}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

   Remarque : La fonction f est positive comme le montre le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie B

1) Comme la fonction f est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$: $\mathscr{A} = \mathscr{A}(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

   D'après le théorème fondamentale de l'intégration : $\mathscr{A}'(t) = f(t) > 0$

   La fonction $\mathscr{A}$ est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$

2) On peut donc en déduire que : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t) = 1$

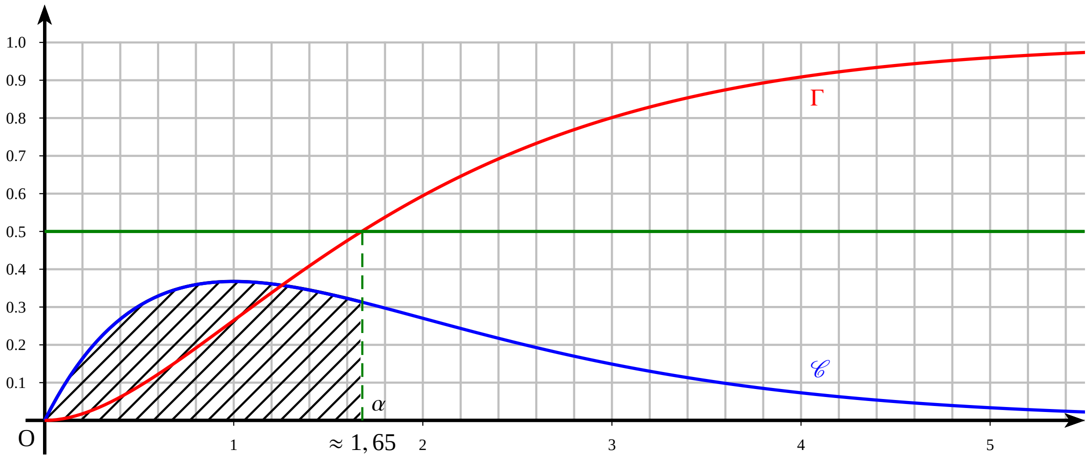
   Remarque : La fonction f peut être considérée comme une densité de probabilité.

3) a) On a les conditions suivantes sur $[0\,;+\infty[$

- $\mathscr{A}$ est continue car dérivable.
- $\mathscr{A}$ est monotone car croissante.
- $\mathscr{A}(0)=0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\mathscr{A}(t)=1$ donc $\dfrac{1}{2}\in\mathscr{A}\,([0\,;+\infty[)$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $\mathscr{A}(\alpha)=\dfrac{1}{2}$

b) On a la résolution graphique suivante : on trouve $\alpha\approx 1,65$



4) a) $g'(x)=e^{-x}-(1+x)\,e^{-x}=e^{-x}-e^{-x}-x\,e^{-x}=-x\,e^{-x}=-f(x)$

b) Comme $g'(x)=-f(x)$, $(-g)$ est une primitive de f.

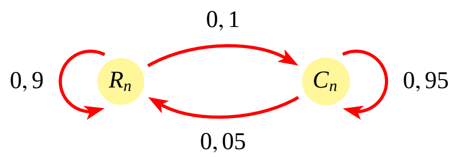
$$\mathscr{A}(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[-g(x)\Big]_0^t=-g(t)+g(0)=-(1+t)\,e^{-t}+1=1-(1+t)\,e^{-t}$$

c) $\mathscr{A}(6)=1-7\,e^{-6}\approx 0,98$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 5 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) a) On peut faire le graphe suivant :



$$\begin{cases} R_{n+1}=0,9R_n+0,05C_n \\ C_{n+1}=0,1R_n+0,95b_n \end{cases}$$

$$\mathbf{MU}_n=\begin{pmatrix}0,9 & 0,05\\ 0,1 & 0,95\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_n\\ C_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,9R_n+0,05C_n\\ 0,1R_n+0,95C_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{n+1}\\ C_{n+1}\end{pmatrix}=\mathbf{U}_{n+1}.$$

b) $\mathbf{U}_1=\mathbf{MU}_0=\begin{pmatrix}0,9 & 0,05\\ 0,1 & 0,95\end{pmatrix}\begin{pmatrix}90\\ 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81+1,5\\ 9+28,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}82,5\\ 37,5\end{pmatrix}.$

Il y a 81,5 millions de ruraux et 37,5 millions de citadins en 2011.

2) On a : $\mathbf{U}_1=\mathbf{MU_0}$, $\mathbf{U}_2=\mathbf{MU_1}=\mathbf{M}^2\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U}_3=\mathbf{MU_2}=\mathbf{M}^3\mathbf{U_0}$, … de proche en proche, on a :

$\mathbf{U}_n=\mathbf{M}^n\mathbf{U_0}$.

3) $\det(\mathbf{P}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3.$

Comme $\det(\mathbf{P}) \neq 0$, la matrice $\mathbf{P}$ est inversible et

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{P})}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Autre méthode : on pose $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, on montre alors : $\mathbf{PB} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{BP} = \mathbf{I}$

4) a) $\Delta = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}.$

Δ est donc une matrice diagonale.

b) $$\mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.85 \\ 2 & -0,85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1,7}{3} & \frac{1}{3} - \frac{0,85}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{1,7}{3} & \frac{2}{3} + \frac{0,85}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2,7}{3} & \frac{0,15}{3} \\ \frac{0,3}{3} & -\frac{2,85}{3} \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} = \mathbf{M}$$

Autre méthode, on multiplie Δ par $\mathbf{P}$ à gauche :

$\mathbf{P}\Delta = \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}) \Leftrightarrow \mathbf{P}\Delta = (\mathbf{PP}^{-1})\mathbf{MP} \Leftrightarrow \mathbf{P}\Delta = \mathbf{IMP} \Leftrightarrow \mathbf{P}\Delta = \mathbf{MP}$

On multiplie ensuite $\mathbf{P}\Delta$ par $\mathbf{P}^{-1}$ à droite :

$(\mathbf{P}\Delta)\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{MP})\mathbf{P}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{M}(\mathbf{PP}^{-1}) \Leftrightarrow \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{MI} \Leftrightarrow \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{M}$

c) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $\mathbf{M}^n = \mathbf{P}\Delta^n\mathbf{P}^{-1}$.

Initialisation : $n = 1$, on a montré à la question précédente que : $\mathbf{M} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Supposons que $\mathbf{M}^n = \mathbf{P}\Delta^n\mathbf{P}^{-1}$. Montrons que $\mathbf{M}^{n+1} = \mathbf{P}\Delta^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$.

Par hypothèse : $\mathbf{M}^n = \mathbf{P}\Delta^n\mathbf{P}^{-1}$, on multiplie à gauche par $\mathbf{M}$

$\mathbf{M} \times \mathbf{M}^n = \mathbf{M} \times \mathbf{P}\Delta^n\mathbf{P}^{-1}$ or $\mathbf{M} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$, en remplaçant dans le terme de droite :

$\mathbf{M}^{n+1} = (\mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1})\mathbf{P}\Delta^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\Delta(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\Delta^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{I}\Delta^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}(\Delta\Delta^n)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\Delta^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{M^n} = \mathbf{P}\Delta^n\mathbf{P}^{-1}$

5) a) De $\mathbf{U}_n = \mathbf{M}^n\mathbf{U}_0$, on obtient :

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{M}^n\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 + 60 \times 0,85^n + 10 - 10 \times 0,85^n \\ 60 - 60 \times 0,85^n + 20 + 10 \times 0,85^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 50 \times 0,85^n + 40 \\ -50 \times 0,85^n + 80 \end{pmatrix}$$

On a alors : $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et $C_n = -50 \times 0,85^n + 80$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$ car $-1 < 0,85 < 1$.

Par somme et produit $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 40$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 80$

Après un certain nombre d'années, les populations vont se stabilisées vers 40 millions pour les ruraux et 80 millions pour les citadins.

6) a) On obtient l'algorithme suivant : on trouve $n = 6$

Variables : n, R, C : réel
Entrées et initialisation
- n prend la valeur 0
- R prend la valeur 90
- C prend la valeur 30

Traitement
- **tant que** $R > C$ **faire**
  - n prend la valeur $n + 1$
  - R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$
  - C prend la valeur $120 - R$ ou $-50 \times 0,85^n + 80$
- **fin**

Sorties : Afficher n

b) $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n \Leftrightarrow 100 \times 0,85^n < 40 \Leftrightarrow 0,85^n < 0,4 \Leftrightarrow$

$n \ln 0,85 < \ln 0,4 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,85}$ (÷ par un nbre négatif) $\Leftrightarrow n > 5,64$.

La population citadine devient supérieure à la population rurale à partir de la 6e année, soit à partir de 2016.