BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soient A le point d'affixe $2-5i$ et B le point d'affixe $7-3i$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-i| = |z+2i|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4) Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1+|z|$.
5) Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
3) En déduire que si $x \geqslant e$ alors $f(x) \geqslant e$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant e$.
   b) Déterminer les variations de la suite (u_n).
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   d) Déterminer sa limite ℓ.

3) On donne l'algorithme ci-contre.

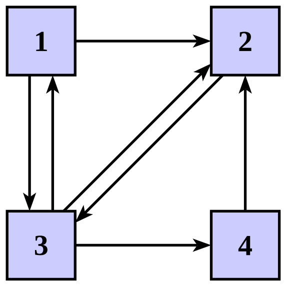
Variables
X variable réelle, Y variable entière
Initialisation
$5 \to X, \quad 0 \to Y$
Traitement
Tant que $X > 2,72$
$\quad \dfrac{X}{\ln X} \to X, \qquad Y+1 \to Y$
FinTantque
Sortie
Afficher Y

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5

EXERCICE 3 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



Une entreprise expérimente la mise en place d'un mini-réseau intranet pour son personnel. Pour l'instant, le réseau ne donne accès qu'à 4 pages numérotées 1, 2, 3 et 4. Ces pages comportent un ou plusieurs liens qui pointent chacun vers l'une des autres pages. L'organisation de cette « toile » miniature peut-être schématisée par le graphe ci-contre

1) Un employé entre sur le réseau par la page 4. Sur quelle(s) page(s) peut-il se rendre en un seul clic ? En exactement 2 clics ?

2) On suppose dorénavant qu'un employé distrait explore le réseau au hasard : une fois qu'il est entré par l'une des pages, il clique au hasard sur un des liens figurant sur cette page, et il continue sa navigation de la sorte, sans se préoccuper de son parcours antérieur.
Écrire la matrice $\mathbf{T} = (t_{ij})$ de transition associée à ce graphe probabiliste. Quelle est la valeur du coefficient t_{32} ? À quelle probabilité correspond ce coefficient ?

3) a) À l'aide d'une calculatrice, calculer $\mathbf{T}^3$, $\mathbf{T}^4$ et $\mathbf{T}^8$. On donnera les coefficients avec une précision de 10^{-2}

b) En déduire les probabilités qu'un employé se rende en cliquant au hasard :
- de la page 2 à la page 3 en trois clics ;
- de la page 3 à la page 4 en quatre clics ;
- de la page 4 à la page 3 en huit clics.

4) On note Y_n, la variable aléatoire qui représente la page sur laquelle l'employé se trouve après n clics et $\mathbf{X}_n$ la matrice ligne représentatant la loi de Y_n, c'est à dire :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} P(\mathrm{Y}_n = 1) & P(\mathrm{Y}_n = 2) & P(\mathrm{Y}_n = 3) & P(\mathrm{Y}_n = 4) \end{pmatrix}$$

a) On a admet que l'on a : $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n \times \mathbf{T}$. Exprimer $\mathbf{X}_n$ en fonction de $\mathbf{X}_0$ et de $\mathbf{T}$.

b) Calculer $\mathbf{X}_4$ lorsque $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) À l'aide de votre calculatrice, calculer $\mathbf{T}^{20}$. Qu'observe-t-on ?

d) Vérifier que quelle que soit la matrice ligne $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_n$ semble se stabiliser quand n devient grand autour de $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{15} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{15} \end{pmatrix}$.
Quel classement par indice de pertinence obtient-on pour les quatre pages ?

EXERCICE 4 (4 points)

Partie A

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie B

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1) Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 250]$.

2) Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.

3) a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 250]$ on a $f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19}$.
Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 250]$ par
$F(t) = 50 \ln\left(\mathrm{e}^{0,04t} + 19\right)$ est une primitive de la fonction f.

   b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50 ; 100]$.
En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 2

(À rendre avec la copie)