

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.
- ▶ **votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.

EXERCICE 1**(5 points)**

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n : u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

- 1) Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
- 2) On admet que, pour tout entier naturel n : u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.
 - a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$.
 - b) Montrer par récurrence, que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) . Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
- 3) Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

| |
|--|
| Variables : N : entier naturel U : réel Entrées et initialisation U prend la valeur 0,3 N prend la valeur 0 Traitement tant que faire fin Sorties : Afficher |
|--|

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06v_n(1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$: v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

- 1) Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
- 2) On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie : $\ell = 1,06\ell(1 - \ell)$.
- 3) La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

EXERCICE 2**(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - \frac{2 + 3 \ln x}{x}$.

- 1) Soit φ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = x^2 - 1 + 3 \ln x$.
 - a) Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.
 - b) Étudier les variations de φ sur $]0 ; +\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x .
- 2) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- b) Montrer que sur $]0 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$.
- c) En déduire le tableau de variation de f .
- d) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; 1]$ et une unique solution β sur $]1 ; +\infty[$
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α et β à 10^{-2} près.
- e) Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 \ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2$
Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 3**(5 points)**

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$ et (E) l'équation d'inconnue complexe $z : z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$
Proposition 1 : « Pour toute valeur de a réel, l'équation (E) admet deux solutions non réelles de même module. »
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2 + i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = 1 + 4i$.
Proposition 2 : « Le triangle ABC est rectangle isocèle. »
- 3) Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0; \pi[$ et z le nombre complexe : $z = 1 + e^{i\theta}$.
Proposition 3 : « Un argument de z est θ »
- 4) Soit le nombre complexe $z = -\sqrt{3} + 3i$
Proposition 4 : « Un argument de z est $\frac{5\pi}{6}$ »
- 5) Soit le nombre complexe $z = 1 + i$ et n un entier naturel.
Proposition 5 : « Le nombre complexe z^n est un imaginaire pur si et seulement si $(n - 2)$ est un multiple de 4. »

EXERCICE 4**(5 points)****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

- À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

- On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.
- Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| Fréquence | 9,42 | 1,02 | 2,64 | 3,38 | 15,87 | 0,94 | 1,04 | 0,77 | 8,41 | 0,89 | 0,00 | 5,33 | 3,23 |
| Lettre | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| Fréquence | 7,14 | 5,13 | 2,86 | 1,06 | 6,46 | 7,90 | 7,26 | 6,24 | 2,15 | 0,00 | 0,30 | 0,24 | 0,32 |

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

- 1) Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E ?
- 2) Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 \pmod{26} \\ b \equiv 4 \pmod{26} \end{cases}$$

- 3) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) ayant pu permettre le codage de ce texte.

Partie B

- 1) On choisit $a = 22$ et $b = 4$.
 - a) Coder les lettres K et X.
 - b) Ce codage est-il envisageable ?
- 2) On choisit $a = 9$ et $b = 4$.
 - a) Montrer que pour tous entiers naturels n et m , on a : $m \equiv 9n+4 \pmod{26} \Leftrightarrow n \equiv 3m+14 \pmod{26}$.
 - b) Décoder le mot NBELA.