BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

OBLIGATOIRE ET SPÉ

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

1) a) En faisant fonctionner le programme, on trouve : $u_3 \simeq 1{,}834\,0$. La valeur exacte vaut : $u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

b) Cet algorithme permet de caluler une valeur approchée du terme u_n, n étant donné.

c) D'après le tableau, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 2 ($u_{20} = 1{,}999\,9$)

2) a) Soit la proposition P_n : pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.
Démontrons que la propostion est vraie par récurrence.
- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$. La proposition P_0 est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que $0 < u_n \leqslant 2$ montrons alors que $0 < u_{n+1} \leqslant 2$. On rappelle que la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$0 < u_n \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2u_n \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{0} < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{4} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < u_{n+1} \leqslant 2$$

La propostion P_n est héréditaire.
- **Conclusion :** Par initialisation et hérédité la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

b) On calcule le rapport de deux termes consécutifs : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{2u_n}{u_n^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$

Comme u_n est strictement positif et $u_n \leqslant 2$, comme la fonction inverse est décroissante, on a les équivalences suivantes :

$$u_n \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{u_n} \geqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{u_n} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{u_n}} \geqslant 1$$

Comme les termes u_n sont strictement positifs et le rapport de deux termes consécutifs est supérieur ou égal à 1, la suite (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 2$

3) a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique :

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2u_n - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2) = \frac{1}{2}v_n$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}$, la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

b) On a alors : $v_n = v_0 q^n = -\ln 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, on en déduit alors :

$$\ln u_n = \ln v_n + \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad u_n = e^{v_n + \ln 2} = 2e^{v_n} = 2e^{-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ de plus $\displaystyle\lim_{n\to 0} e^n = 1$

donc par produit et composition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$. La suite (u_n) converge donc vers 2.

d) On fait une boucle avec un "tant que", on incrémente n à chaque boucle puis on affiche le résultat. On trouve alors $n = 11$. La suite converge rapidement vers 2.

```
Variables : n entier, u réel
Entrées et initialisation
    0 → n
    1 → u
Traitement
    tant que u ⩽ 1,999
    faire
        √(2u) → u
        n + 1 → n
    fin
Sorties : Afficher n
```

EXERCICE 2 **(3 points)**

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} + (x+2) \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(2+x+2) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$$

2) a) on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$ et $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}x} = +\infty$

Par produit, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) On a : $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x} = xe^{\frac{1}{2}x} + 2e^{\frac{1}{2}x} = 2\left(\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{\frac{1}{2}x}$

On pose $X = \frac{1}{2}x$, donc $x \to -\infty$ alors $X \to -\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{X\to-\infty} 2e^X = 0$

Par produit et somme on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{1}{2}x} > 0$

De même le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x+4)$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{1}{2}x} > 0$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-2e^{-2}$	↗	$+\infty$

EXERCICE 3 **(7 points)**

1) a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} 1+\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ or $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ par somme et produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

c) Les axes de coordonnées sont alors asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ car somme et quotient de fonction dérivable sur $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1+\ln x)}{x^4} = \frac{x - 2x(1+\ln x)}{x^4} = \frac{x(1-2-2\ln x)}{x^4} = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

b) On a : $-1 - 2\ln x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < \ln e^{-\frac{1}{2}}$

Comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+$, an a : $x < e^{-\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-1 - 2\ln x$, on a alors :

- Si $x < \frac{1}{\sqrt{e}}$, $f'(x) > 0$ et si $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$, $f'(x) < 0$

c) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{e}{2}$$

3) a) Résolvons l'équation $f(x) = 0$, comme $x > 0$, on a :

$$1 + \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \ln e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Donc $\mathscr{C}$ possède un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses $\mathrm{A}\left(\frac{1}{e};0\right)$.

b) D'après le tableau de variation, on a :

- Si $x < \frac{1}{e}$ $f(x) < 0$, et si $x > \frac{1}{e}$, $f(x) > 0$

4) a) D'après le tableau de variation, $\forall x \in \left[\frac{1}{e};2\right]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{e}{2}$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e}{2}\left(2 - \frac{1}{e}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}$$

b) Comme on connaît l'expression de la primitive, on a :

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{\frac{1}{e}}^{n} = F(n) - F\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2-\ln n}{n} + \frac{2 + \ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}$$
$$= \frac{-2-\ln n}{n} + e = e - \frac{\ln n}{n} - \frac{2}{n}$$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} = 0$, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e$

Graphiquement, cela signifie que l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$. La fonction f étant positive sur cet intervalle.

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) Pour déterminer les points invariants, in faut résoudre $z' = z$ avec $z \neq -1$

$$\frac{z-1}{z+1} = z \quad \Leftrightarrow \quad z - 1 = z^2 + z \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = i \text{ ou } z = -i$$

Il existe deux points invariants C(i) et D($-i$).

2) a) On a avec $z' \neq -1$:

$$z' = \frac{z-1}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad z'(z+1) = z-1 \quad \Leftrightarrow \quad z'(z+1)-(z+1) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)(z'-1) = -2$$

b) Si on traduit cette relation avec les modules et les arguments, en remarquant que $z' - 1 = z' - z_A$ et $z + 1 = z - z_B$, on obtient :

$$|((z'-1)(z+1)| = |-2| \quad \Leftrightarrow \quad |z'-1| \times |z+1| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad AM' \times BM = 2$$

$$\arg[(z'-1)(z+1)] = \arg(-2) \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right) = \pi$$

3) Si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2 alors BM = 2.

D'après la relation du 2b), on a alors : $AM' = \dfrac{2}{BM} = 1$.

Donc M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et de rayon 1.

4) a) $p + 1 = -1 + i\sqrt{3}$ donc $|p+1| = \sqrt{1+3} = 2$ et :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{donc} \qquad p + 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

b) On a : $|p+1| = |p - z_B| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad BP = 2$

Donc P appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2.

c) A, P', Q sont alignés dans cet ordre si, et seulement si $\left(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AQ}\right) = 0$

D'après le 2a), on a : $(p'-1)(p+1) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad p' - 1 = \dfrac{-2}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

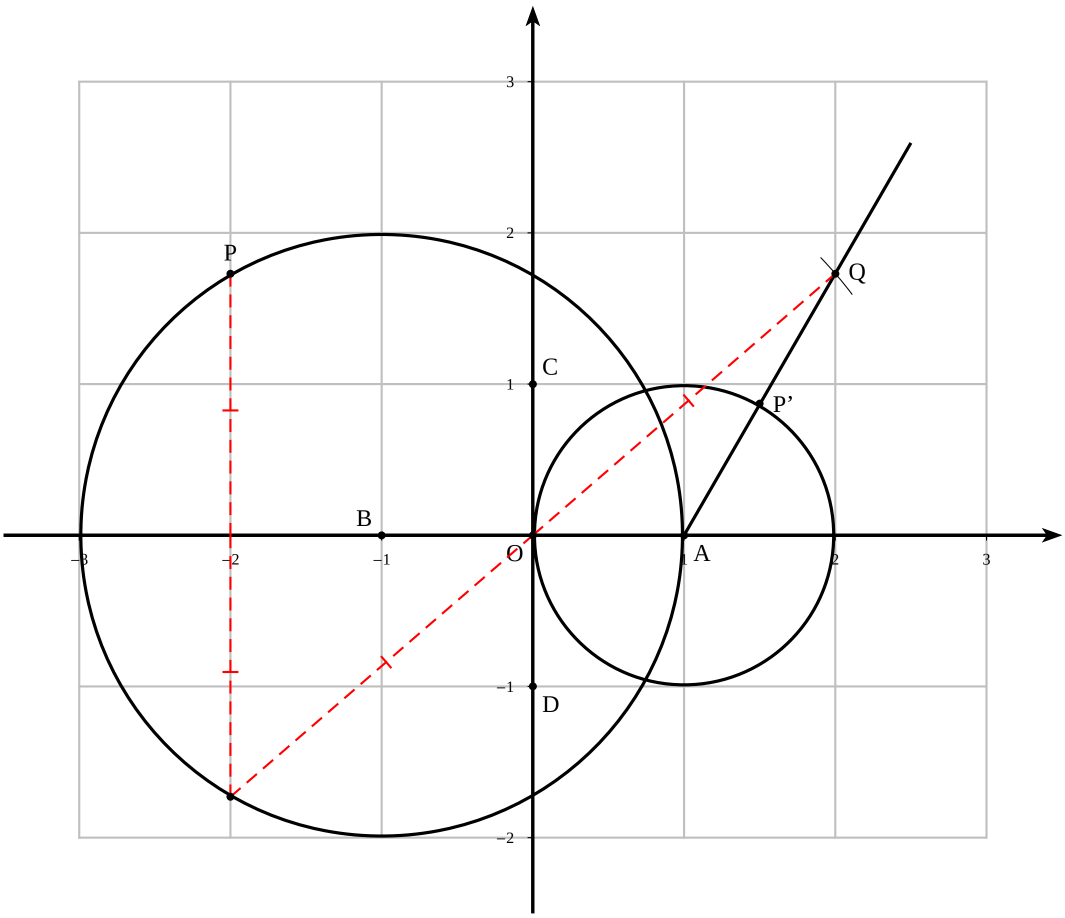
on a : $q - 1 = -\overline{p} - 1 = -(\overline{p} + 1) = -(\overline{p+1}) = -2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

donc $\left(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AQ}\right) = \arg\left(\dfrac{q-1}{p'-1}\right) = \arg\left(\dfrac{-2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{-e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\right) = \arg(2) = 0$

Les point A, P' et Q sont alignés dans cet ordre.

d) Pour placer P'

- On trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2.
- On trace le cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et de rayon 1. P est sur le cercle $\mathscr{C}$ d'abscisse -2.
- Pour placer Q, il faut faire, avec le point P, une symétrie d'axe (Ox) (affixe $\overline{p}$) puis une symétrie de centre O (affixe $-\overline{p}$).
- Le point P' est alors l'intersection de la demi droite (OQ] et du cercle $\mathscr{C}'$



EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) a) On a $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1 \mod 7$ donc $2^3 \equiv 1 \mod 7$

Comme la congruence est compatible avec les puissances, an a : $\left(2^3\right)^n \equiv 1^n \mod 7 \Leftrightarrow 2^{3n} \equiv 1 \mod 7$

b) On a : $2011 = 7 \times 287 + 2$ et $2014 = 3 \times 671 + 1$, on a donc :

$$2011^{2014} \equiv 2^{3\times 671+1} \equiv \left(2^3\right)^{671} \times 2^1 \equiv 2 \mod 7$$

Le reste de la division par 7 de 2011^{2014} est 2.

2) a) Si un entier naturel $n \geqslant 2$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$

b) Si 257 n'est pas premier, alors il doit admettre un diviseur premier p tel que : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{257} \Leftrightarrow 2 \leqslant p \leqslant 16$

On teste alors les divisions de 257 par un nombre premier inférieur à 16 soit : 2, 3, 5, 7, 11, 13.

D'après les critères de divisibilité, 257 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 11.

257 n'est divisible ni par 7, ni par 13 car : $257 = 7 \times 36 + 5$ et $257 = 13 \times 19 + 10$

Donc 257 est un nombre premier.

3) a) La lettre U se code D. On obtient les étapes suivantes :

$$\text{U} \longrightarrow 20 \longrightarrow 9 \times 20 + 5 = 185 \longrightarrow 185 \equiv 3 \mod 26 \longrightarrow \text{D}$$

b) On obtient l'algorithme suivant :

Variables : m et p entiers naturels
Entrées et initialisation
  Lire m
  $0 \to p$
Traitement
  $9m + 5 \to p$
  tant que $p \geqslant 26$ **faire**
    $p - 26 \to p$
  fin
Sorties : Afficher m

c) Si $x = 3$ alors $9x = 27 \equiv 1 \mod 26$

d) Il faut montrer l'équivalence dans les deux sens.

- Si $9x + 5 \equiv p \mod 26$ comme la congruence est compatible avec la multiplication, en multipliant par 3,

$$27x + 15 \equiv 3p \mod 26 \quad \text{donc} \quad x \equiv 3p - 15 \mod 26$$

- Réciproquement, si $x \equiv 3p + 15 \mod 26$ en multipliant par 9,

$$9x \equiv 27p - 135 \mod 26 \quad \text{or} \quad 135 \equiv 5 \mod 26 \quad \text{donc} \quad 9x + 5 \equiv p \mod 26$$

e) Pour décoder une lettre, il faut lui appliquer la fonction affine f telle que : $f(x) = 3x - 15$.
Pour la lettre B, on a alors :

$$\text{B} \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \times 1 - 15 = -12 \longrightarrow -12 \equiv 14 \mod 26 \longrightarrow \text{O}$$

La lettre B se décode en O.