CORRIGE – Notre Dame de La Merci Montpellier – M. QUET

EXERCICE 3A.1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3\times 2^n$.

a. $u_1 = 3\times 2^1 = 6$; $u_2 = 3\times 2^2 = 3\times 4 = 12$

et $u_3 = 3\times 2^3 = 3\times 8 = 24$.

b. $u_{n+1} = 3\times 2^{n+1} = 3\times 2\times 2^n = 6\times 2^n$

c. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\boxed{3}\times 2^{n+1}}{\boxed{3}\times 2^n} = 2$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3\times 2^0 = 3$ et de raison $q = 2$.

EXERCICE 3A.2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

a. $u_1 = -3\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = -\dfrac{3}{2}$; $u_2 = -3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = -\dfrac{3}{4}$

et $u_3 = -3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{3}{8}$.

b. $u_{n+1} = -3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = -3\times\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\boxed{-3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{\boxed{-3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{2}$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -3\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = -3$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 3A.3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5\times(-1)^n$

a. $u_1 = -5\times(-1)^1 = 5$; $u_2 = -5\times(-1)^2 = -5$

et $u_3 = -5\times(-1)^3 = 5$.

b. $u_{n+1} = -5\times(-1)^{n+1} = -5\times(-1)\times(-1)^n = 5\times(-1)^n$

c. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\boxed{-5}\times(-1)^{n+1}}{\boxed{-5}\times(-1)^n} = -1$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -5\times(-1)^0 = -5$ et de raison $q = -1$.

EXERCICE 3A.4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$: le rapport entre deux termes consécutifs n'est pas constant (il dépend de n), donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

EXERCICE 3A.5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7^n$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7^{n+1}}{7^n} = 7$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 7^0 = 1$ et de raison $q = 7$.

EXERCICE 3A.6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3\times\left(\dfrac{-5}{2}\right)^n$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\boxed{3}\times\left(\dfrac{-5}{2}\right)^{n+1}}{\boxed{3}\times\left(\dfrac{-5}{2}\right)^n} = \dfrac{-5}{2}$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3\times\left(\dfrac{-5}{2}\right)^0 = 3$ et de raison $q = \dfrac{-5}{2}$.

Dans tous les exercices qui suivent, (u_n) est une suite géomtrique de raison q.
On rappelle la formule : $u_n = u_0\times q^n$

EXERCICE 3A.7

a. On donne $u_0 = -1$ et $q = 2$.

→ $u_7 = u_0\times q^7 = (-1)\times 2^7 = -128$.

b. On donne $u_0 = 7$ et $q = \frac{1}{2}$.

$\rightarrow u_5 = u_0 \times q^5 = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$.

c. On donne $u_0 = 243$ et $q = \frac{-1}{3}$.

$\rightarrow u_5 = u_0 \times q^5 = 243 \times \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = -1$.

EXERCICE 3A.8

a. On donne $u_3 = 2$ et $q = 3$.

$\rightarrow u_6 = u_3 \times q^{6-3} = 2 \times 3^3 = 54$

b. On donne $u_5 = 2$ et $q = -5$.

$\rightarrow u_9 = u_5 \times q^{9-5} = 2 \times (-5)^4 = 1250$.

c. On donne $u_3 = 0{,}01$ et $q = -10$

$\rightarrow u_7 = u_3 \times q^{7-3} = 0{,}01 \times (-10)^4 = 100$

d. On donne $u_8 = 512$ et $q = 2$.

$\rightarrow u_8 = u_3 \times q^{8-3} \Leftrightarrow 512 = u_3 \times 2^5$

$\rightarrow u_3 = \frac{512}{2^5} = \frac{512}{32} = 16$

e. On donne $u_2 = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{2}{3}$.

$\rightarrow u_5 = u_2 \times q^{5-2} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{8}{27} = \frac{2}{9}$

EXERCICE 3A.9

a. On donne $u_2 = 17$ et $u_3 = 51$

$\rightarrow u_3 = u_2 \times q$ donc $q = \frac{u_3}{u_2} = \frac{51}{17} = 3$

$\rightarrow u_5 = u_2 \times q^{5-2} = 17 \times 3^3 = 459$

b. On donne $u_1 = 7$ et $u_3 = 112$

$\rightarrow u_3 = u_1 \times q^{3-1}$ donc $q^2 = \frac{u_3}{u_1} = \frac{112}{7} = 16$

$\rightarrow q^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (q+4)(q-4) = 0$

$\rightarrow$soit $q = -4$, soit $q = 4$

$\rightarrow$si $q = -4$, $u_6 = u_1 \times q^{6-1} = 7 \times (-4)^5 = -1792$

$\rightarrow$si $q = 4$, $u_6 = u_1 \times q^{6-1} = 7 \times 4^5 = 1792$

c. On donne $u_7 = 11$ et $u_{10} = 3\,773$

$\rightarrow u_{10} = u_7 \times q^{10-7}$ donc $q^3 = \frac{u_{10}}{u_7} = \frac{3\,773}{11} = 343$

$\rightarrow q^3 = 343 \Leftrightarrow q = 343^{\frac{1}{3}} = 7$

$\rightarrow u_{12} = u_{10} \times q^2 = 3\,773 \times 7^2 = 184\,877$

d. On donne $u_5 = 41$ et $u_9 = 25\,625$

$\rightarrow u_9 = u_5 \times q^{9-5}$ donc $q^4 = \frac{u_9}{u_5} = \frac{25\,625}{41} = 625$

$\rightarrow q^4 = 625 \Leftrightarrow q = 625^{\frac{1}{4}} = 5$

$\rightarrow u_{10} = u_9 \times q = 25\,625 \times 5 = 128\,125$

e. On donne $u_4 = 256$ et $u_{15} = 0{,}125$

$\rightarrow u_{15} = u_4 \times q^{15-4}$ donc $q^{11} = \frac{u_{15}}{u_4} = \frac{0{,}125}{256} = \frac{\frac{1}{8}}{2^8}$

$\rightarrow q^{11} = \frac{\frac{1}{2^3}}{2^8} = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^{11}}$

$\rightarrow q = \left(\frac{1}{2^{11}}\right)^{\frac{1}{11}} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow u_{18} = u_{15} \times q^{18-15} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

EXERCICE 3A.10

a. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 2$.

$\rightarrow u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = u_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

$= -3 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = -3 \times \frac{1 - 2\,048}{-1}$

$= 3 \times (-2\,047) = -6\,141$

b. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 64$ et de raison $q = 0{,}5$.

$\rightarrow u_1 + \ldots + u_{12} = u_1 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

$= 64 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \times \frac{1 - \frac{1}{4096}}{\frac{1}{2}}$

$$=128\times\left(\frac{4096}{4096}-\frac{1}{4096}\right)=128\times\frac{4095}{4096}$$
$$=\frac{4095}{32}$$

c. Soit (u_n) est la suite géométrique de premier terme u_5 = 5 et de raison q = 0,9.

$$u_5+u_6+\ldots+u_{20}=u_5\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$
$$=5\times\frac{1-0,9^{20-5+1}}{1-0,9}=5\times\frac{1-0,9^{16}}{0,1}$$
$$=\frac{5}{0,1}\times\left(1-0,9^{16}\right)\simeq 40,74$$

EXERCICE 3A.11

Un nageur s'apprête à traverser la manche, soit une distance de 21 km.
Pendant de la première heure, il parcourt 2,1 km. Mais à cause de la fatigue, à chaque heure il ne nage que 90% de la distance nagée pendant l'heure précédente.

1. a. Déterminer une suite géométrique u_n de premier terme u_1 = 2,1 dont chaque terme correspond à la distance nagée pendant la $n^{\text{ème}}$ heure : $u_n=u_1\times q^{n-1}=2,1\times 0,9^{n-1}$

b. $u_2=2,1\times 0,9^{2-1}=1,89$

$u_5=2,1\times 0,9^{5-1}=1,377\,81$

$u_{10}=2,1\times 0,9^{10-1}\simeq 0,813\,58$.

2. a. Distance parcourue en 10 heures :

$$u_1+u_2+\ldots+u_{10}=u_1\times\frac{1-q^{10}}{1-q}=2,1\times\frac{1-0,9^{10}}{1-0,9}$$
$$=\frac{2,1}{0,1}\times\left(1-0,9^{10}\right)\simeq 13,678\text{ km}$$

b. … en 20 heures ?

$$u_1+u_2+\ldots+u_{20}=u_1\times\frac{1-q^{20}}{1-q}=2,1\times\frac{1-0,9^{20}}{1-0,9}$$
$$=\frac{2,1}{0,1}\times\left(1-0,9^{20}\right)\simeq 18,447\text{ km}$$

c. … en 100 heures ?

$$u_1+u_2+\ldots+u_{30}=u_1\times\frac{1-q^{30}}{1-q}=2,1\times\frac{1-0,9^{30}}{1-0,9}$$
$$=\frac{2,1}{0,1}\times\left(1-0,9^{30}\right)\simeq 20,110\text{ km}$$