Chapitre 9 – Loi de Bernoulli et loi binomiale

I – Modélisation d'une répétition d'expériences

a) Expériences indépendantes

<u>Définition :</u> On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes lorsque les résultats de l'une n'influent pas sur les probabilités des issues de l'autre.

<u>Exemple :</u> Dans une urne, il y a trois boules rouges et deux boules vertes.
Expérience 1 : On tire une première boule de l'urne.
Expérience 2 : On tire une deuxième boule de l'urne.

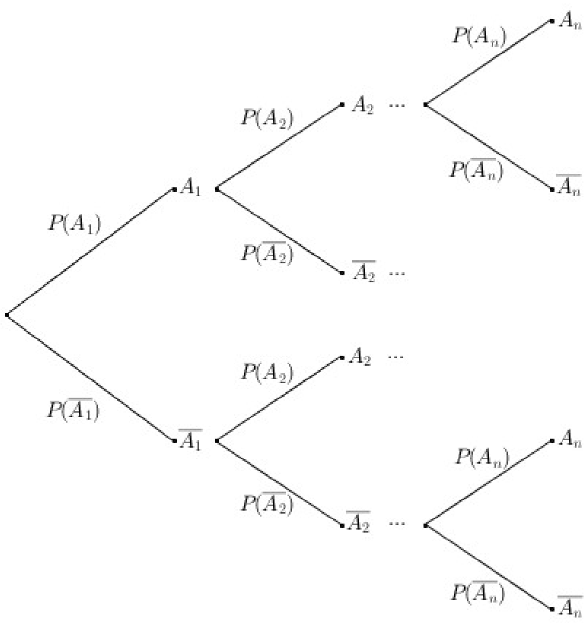
- *Si après l'expérience 1,* ***on remet la boule dans l'urne****, la probabilité de tirer une boule rouge (ou verte) lors de l'expérience 2 sera la même que dans l'expérience 1.*
  Les deux expériences sont indépendantes*.*
- *Si après l'expérience 1,* ***on ne remet pas la boule dans l'urne****, le contenu de l'urne est modifié. Selon le résultat de l'expérience 1, la probabilité de tirer par exemple une boule rouge lors de l'expérience 2 ne sera pas la même que dans l'expérience 1.*
  Les deux expériences ne sont pas indépendantes*.*

<u>Propriété :</u> Quand on répète une même expérience aléatoire dans les *mêmes conditions initiales*, alors les expériences aléatoires sont des *expériences indépendantes*.

<u>Exemple :</u> Si on lance une pièce de monnaie 10 fois de suite, on a 10 expériences indépendantes.

b) Répétition d'une même expérience

<u>Propriété :</u> On répète n fois de suite une expérience aléatoire dans les mêmes conditions initiales.
Si A_i est un évènement de la i ème expérience (avec i entier entre 1 et n), alors on a :
$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$ **.**



Cette probabilité correspond au chemin supérieur de l'arbre, qui contient 2^n chemins.

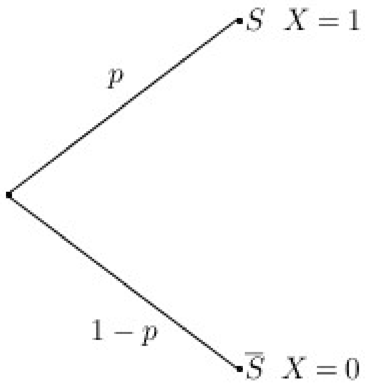
<u>Exemple :</u> On suppose que l'on lance 4 fois une pièce de monnaie truquée : la probabilité d'obtenir « Face » étant 0,7.
On note F_i l'évènement « Obtenir Face au i ème essai ».
La probabilité d'obtenir 4 fois « Face » est donc $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$.

II – Loi de Bernoulli

<u>Définition :</u> Soit $p \in [0;1]$. On considère une expérience aléatoire à deux issues :

- **S (appelée succès) avec une probabilité p,**
- **$\overline{S}$ (appelée échec) avec donc une probabilité $1-p$.**

Cette situation constitue une *épreuve de Bernoulli*.
Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si S est réalisé et 0 sinon.
La loi de probabilité de X est appelée *loi de Bernoulli*.



x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

<u>Exemple :</u> Dans une usine, la probabilité qu'un article fabriqué présente un défaut est 0,02.
Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'article présente un défaut et 0 sinon.
X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=0{,}02$.

<u>Propriétés :</u> Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. Alors :

- $\boldsymbol{E(X)=p}$
- $\boldsymbol{V(X)=p(1-p)}$
- $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}}$

<u>Preuves :</u>

- $E(X)=(1-p)\times 0+p\times 1=p$
- $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=(1-p)\times 0^2+p\times 1^2-p^2=p-p^2=p(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}$

<u>Exemple :</u> En reprenant l'exemple ci-dessus :

- $E(X)=0{,}02$
- $V(X)=0{,}02(1-0{,}02)=0{,}02\times 0{,}98=0{,}0196$
- $\sigma(X)=\sqrt{0{,}0196}=0{,}14$

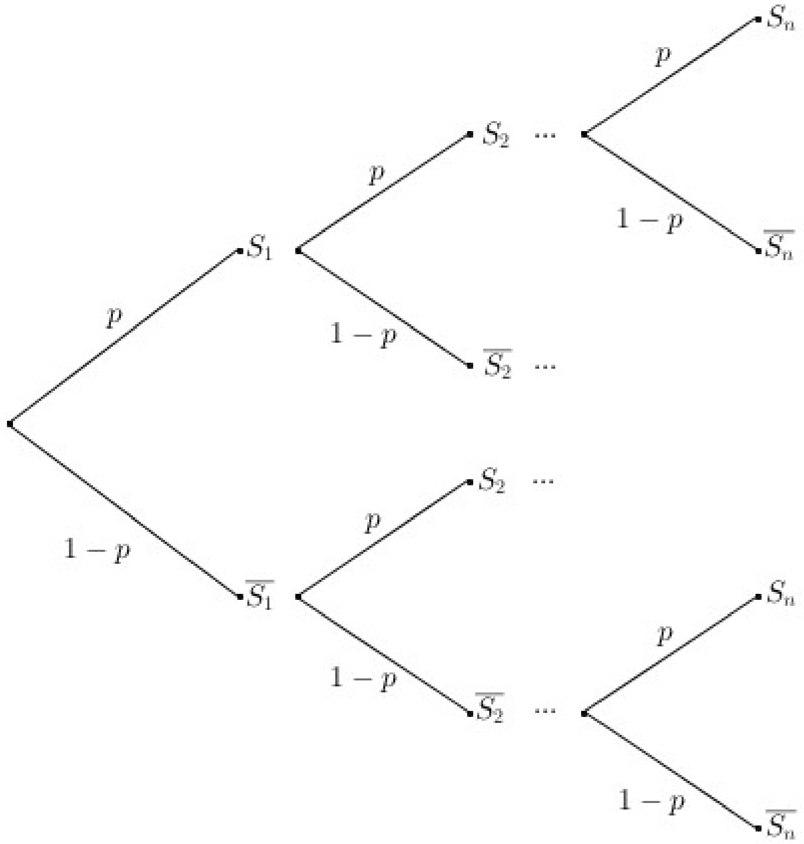
III – Loi binomiale

a) Schéma de Bernoulli

Définition : Lorsqu'on répète une même épreuve de Bernoulli n fois de façons indépendantes, on dit que l'on est en présence d'un *schéma de Bernoulli*.

Cette situation peut être résumée par un arbre :

Cet arbre possède 2^n chemins.



b) Coefficients binomiaux

Définition : Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
$\binom{n}{k}$ est appelé *coefficient binomial*, et se lit « combinaison de k parmi n ».
$\binom{n}{k}$ donne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès parmi les n répétitions d'une épreuve de Bernoulli.

Remarques : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\binom{n}{n} = 1$, car un seul chemin représente n succès lors des n répétitions (c'est le chemin supérieur dans l'arbre).
- $\binom{n}{0} = 1$, car un seul chemin représente n échecs lors des n répétitions (c'est le chemin inférieur dans l'arbre).
- $\binom{n}{1} = n$, car n chemins représente 1 succès lors des n répétitions : en effet, cet unique succès peut se produire à la première épreuve, ou à la deuxième, …, ou à la dernière épreuve.

Remarque : La calculatrice permet de calculer n'importe quel coefficient binomial ; on peut calculer $\binom{20}{5}$ ainsi :

- Sur Texas Instruments, l'instruction se trouve dans « math », puis « PRB », puis « Combinaison » : « 20 Combinaison 5 » fournit la valeur souhaitée.
- Sur Casio, l'instruction se trouve dans « OPTN », puis « ► » (F6), puis « PROB », puis « nCr » : « 20 nCr 5 » fournit la valeur souhaitée.

c) Loi binomiale

Définition : On répète une même épreuve de Bernoulli de paramètre $p\in[0;1]$ n fois de façons indépendantes (schéma de Bernoulli). Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès (c'est-à-dire le nombre de « 1 ») parmi les n expériences.
Alors, on dit que X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p. On note $X\sim B(n;p)$.

Exemple : Si on joue sept fois à un jeu dont la probabilité de gagner à chaque fois est 0,4, la variable aléatoire X représentant le nombre de fois où l'on gagne suit une loi binomiale $B(7;0{,}4)$.

Théorème (loi de probabilité d'une loi binomiale) : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[0;1]$ ($X\sim B(n;p)$).
Alors, pour $0\leqslant k\leqslant n$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Preuve : En utilisant l'arbre, on constate que $X=k$ est réalisé si un chemin comporte k succès et donc $n-k$ échecs. En faisant le produit des probabilités des branches, la probabilité d'un tel chemin est donc $p^k(1-p)^{n-k}$. Comme par définition il y a $\binom{n}{k}$ chemins avec k succès, on a le résultat souhaité.

Propriétés : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

- $\boldsymbol{E(X)=np}$
- $\boldsymbol{V(X)=np(1-p)}$
- $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}}$

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B\left(4;\frac{1}{3}\right)$, alors :

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-3}=4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\times\frac{1}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$$

$$E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$V(X)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

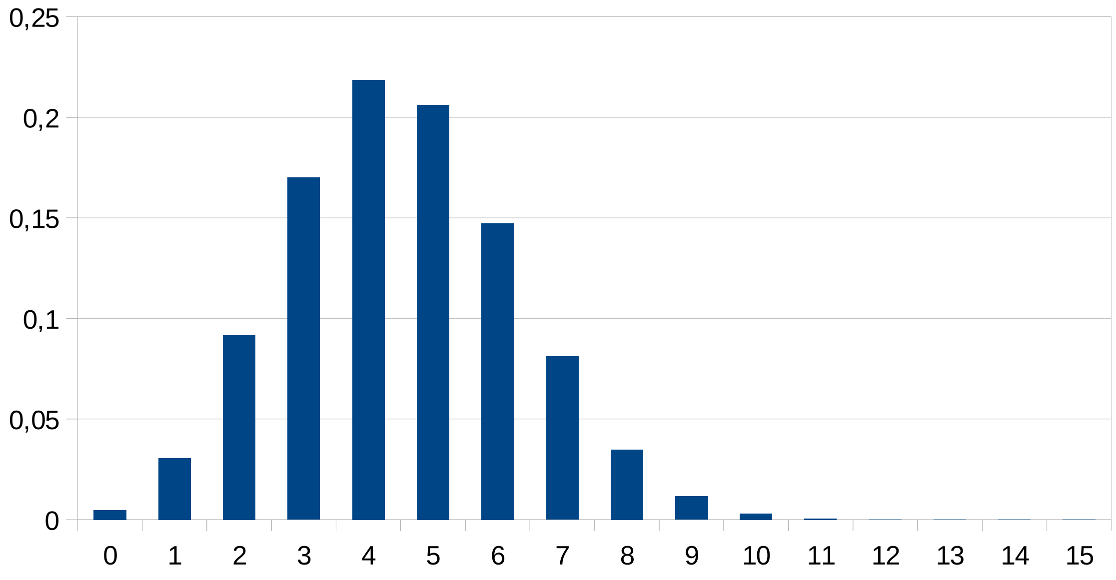
Remarque : La calculatrice permet de calculer les probabilités ; si $X \sim B(20;0{,}6)$, on peut calculer $P(X=7)$ et $P(X \leqslant 7)$ ainsi :

- Sur Texas Instruments, les instructions se trouvent dans « distrib » (« 2nde », puis « var »).
  - $P(X=7)$: binomFdp(20,0.6,7)
  - $P(X \leqslant 7)$: binomFrép(20,0.6,7)
- Sur Casio, les instructions se trouvent dans « DIST » (« OPTN », puis « STAT » puis « DIST ») puis « BINM ».
  - $P(X=7)$: binomialPD(7,20,0.6)
  - $P(X \leqslant 7)$: binomialCD(7,20,0.6)

IV – Loi binomiale et échantillonnage

a) Représentation graphique d'une loi binomiale

On considère dans cette partie une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(15;0{,}3)$.
On construit un diagramme représentant cette loi : en abscisse, ce sont les valeurs k de la variable aléatoire X (avec $0 \leqslant k \leqslant 15$), et en ordonnée, les probabilités $P(X=k)$.



On a $E(X)=15\times 0{,}3=4{,}5$. On remarque que les valeurs de X les plus probables sont centrées autour de l'espérance de X : pour des valeurs éloignées de $E(X)$, la probabilité que X prenne ces valeurs est très faible.
En réalité, cette observation est vraie pour n'importe quelle loi binomiale.

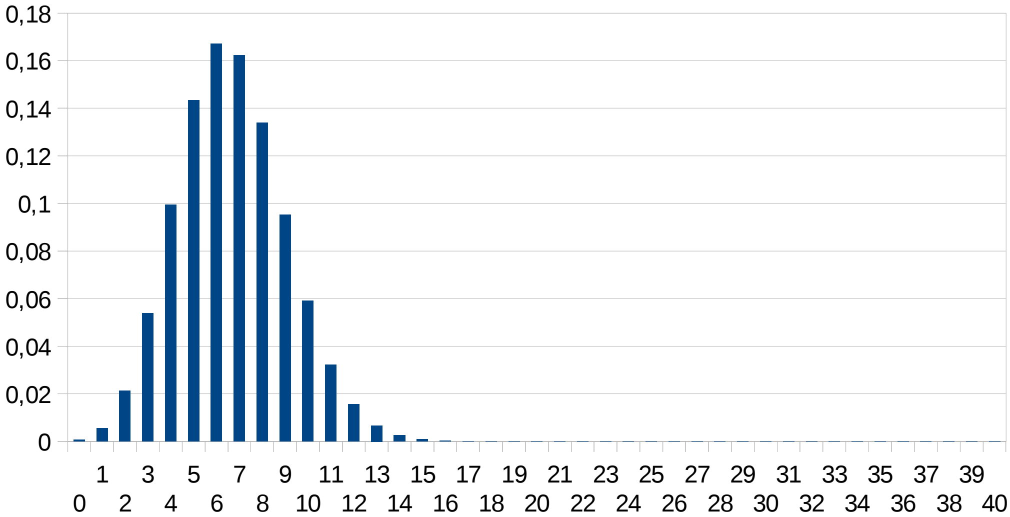
b) Échantillonnage et règle de décision

Exemple : *On cherche à savoir si un dé est truqué. Pour cela, on lance 40 fois un dé et on regarde la fréquence d'apparition de la face 6. Soit X le nombre de fois où 6 apparait.* ***S'il n'est pas truqué****, X suit une loi binomiale de paramètres 40 et $\frac{1}{6}$, et alors $E(X)=40\times\frac{1}{6}=\frac{20}{3}\approx 6{,}67$.*
La face 6 devrait apparaitre en moyenne 6,67 fois environ.
Par calculs, en utilisant la loi de X, on peut déterminer que dans 95 % des cas, X appartient à l'intervalle $\left[\frac{2}{40};\frac{12}{40}\right]$. Il y a donc 95 % de chances que X soit entre 2 et 12.

Définition : Soit $X \sim B(n;p)$. L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation de X, sur un échantillon aléatoire de taille n, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ défini par :

- **a est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$.**
- **b est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.**

Remarque : $0{,}025=2{,}5\%$ et $0{,}975=97{,}5\%=100\%-2{,}5\%$. Pour notre exemple, on a :



Cela veut dire que 95 % environ des valeurs sont dans l'intervalle $[2;12]$, 2,5 % environ des valeurs sont dans $[0;2[$, et 2,5 % environ des valeurs sont dans $]12;40]$.

Règle de décision : Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 % $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion théorique est p dans la population n'est pas remise en question et on l'accepte ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

Exemple : *Si la fréquence observée de la face 6 sur 40 essais appartient à $\left[\frac{2}{40};\frac{12}{40}\right]$, on peut considérer que la face 6 n'est pas truquée ; si elle n'y appartient pas, on peut considérer le dé truqué.*