CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 3A.1

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,1$.

a. Compléter le tableau qui donne la loi de probabilité de X :

$$p(X=0)=\binom{6}{0}\times 0,1^0\times(1-0,1)^6 = BinomFDP(6,0.1,0)=0,531441$$

$$p(X=1)=\binom{6}{1}\times 0,1^1\times(1-0,1)^5 = BinomFDP(6,0.1,1)=0,354294$$

$$p(X=2)=\binom{6}{2}\times 0,1^2\times(1-0,1)^4 = BinomFDP(6,0.1,2)=0,098415$$

$$p(X=3)=\binom{6}{3}\times 0,1^3\times(1-0,1)^3 = BinomFDP(6,0.1,3)=0,01458$$

$$p(X=4)=\binom{6}{4}\times 0,1^4\times(1-0,1)^2 = BinomFDP(6,0.1,4)=0,001215$$

$$p(X=5)=\binom{6}{5}\times 0,1^5\times(1-0,1)^1 = BinomFDP(6,0.1,5)=0,000054$$

$$p(X=6)=\binom{6}{6}\times 0,1^6\times(1-0,1)^0 = BinomFDP(6,0.1,6)=10^{-6}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	Total
$p(X=x_i)$	0,531441	0,354294	0,098415	0,01458	0,001215	0,000054	10^{-6}	1

b. → $p(X\le 2)=0,98415$

→ $p(X>0)=0,468559$

c. → $E(X)=np=6\times 0,1=0,6=$

→ $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{6\times 0,1\times 0,9}\simeq 0,735$

EXERCICE 3A.2

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

a. Compléter le tableau qui donne la loi de probabilité de X :

$$p(X=0)=\binom{10}{0}\times 0,3^0\times(1-0,3)^{10} = BinomFDP(10,0.3,0)=0,0282$$

$$p(X=1)=\binom{10}{1}\times 0,3^1\times(1-0,3)^9 = BinomFDP(10,0.3,1)=0,1211$$

$$p(X=2)=\binom{10}{2}\times 0,3^2\times(1-0,3)^8 = BinomFDP(10,0.3,2)=0,2335$$

$$p(X=3)=\binom{10}{3}\times 0,3^3\times(1-0,3)^7 = BinomFDP(10,0.3,3)=0,2668$$

$$p(X=4)=\binom{10}{4}\times 0,3^4\times(1-0,3)^6 = BinomFDP(10,0.3,4)=0,2001$$

$$p(X=5)=\binom{10}{5}\times 0,3^5\times(1-0,3)^5 = BinomFDP(10,0.3,5)=0,1029$$

$$p(X=6)=\binom{10}{6}\times 0,3^6\times(1-0,3)^4 = BinomFDP(10,0.3,6)=0,0368$$

$$p(X=7)=\binom{10}{7}\times 0,3^7\times(1-0,3)^3=BinomFDP(10,0.3,7)=0,0090$$

$$p(X=8)=\binom{10}{8}\times 0,3^8\times(1-0,3)^2=BinomFDP(10,0.3,8)=0,0014$$

$$p(X=9)=\binom{10}{9}\times 0,3^9\times(1-0,3)^1=BinomFDP(10,0.3,9)=0,0001$$

$$p(X=10)=\binom{10}{10}\times 0,3^{10}\times(1-0,3)^0=BinomFDP(10,0.3,10)=0,000006$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
$p(X=x_i)$	0,0282	0,1211	0,2335	0,2668	0,2001	0,1029	0,0368	0,0090	0,0014	0,0001	6×10^{-6}	

b. A l'aide du tableau, déterminer :

→ $p(X\le 2)=0,0282+0,1211+0,2335=0,3828$

$=BinomFRep(10,0.3,2)$

→ $p(X>0)=1-p(X=0)=0,9718$

c. Déterminer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

→ $E(X)\simeq 3$

→ $\sigma(X)=\sqrt{3}\simeq 1,732$

EXERCICE 3A.3

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=9$ et $p=0,5$.

a. Compléter le tableau qui donne la loi de probabilité de X :

$$p(X=0)=\binom{9}{0}\times 0,5^0\times(1-0,5)^9=BinomFDP(9,0.5,0)=0,0020$$

$$p(X=1)=\binom{9}{1}\times 0,5^1\times(1-0,5)^8=BinomFDP(9,0.5,1)=0,0176$$

$$p(X=2)=\binom{9}{2}\times 0,5^2\times(1-0,5)^7=BinomFDP(9,0.5,2)=0,0703$$

$$p(X=3)=\binom{9}{3}\times 0,5^3\times(1-0,5)^6=BinomFDP(9,0.5,3)=0,1641$$

$$p(X=4)=\binom{9}{4}\times 0,5^4\times(1-0,5)^5=BinomFDP(9,0.5,4)=0,2461$$

$$p(X=5)=\binom{9}{5}\times 0,5^5\times(1-0,5)^4=BinomFDP(9,0.5,5)=0,2461$$

$$p(X=6)=\binom{9}{6}\times 0,5^6\times(1-0,5)^3=BinomFDP(9,0.5,6)=0,1641$$

$$p(X=7)=\binom{9}{7}\times 0,5^7\times(1-0,5)^2=BinomFDP(9,0.5,7)=0,0703$$

$$p(X=8)=\binom{9}{8}\times 0,5^8\times(1-0,5)^1=BinomFDP(9,0.5,8)=0,0176$$

$$p(X=9)=\binom{9}{9}\times 0,5^9\times(1-0,5)^0=BinomFDP(9,0.5,9)=0,0020$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
$p(X=x_i)$	0,002	0,0176	0,0703	0,1641	0,2461	0,2461	0,1641	0,0703	0,0176	0,002	1

b. A l'aide du tableau, déterminer :

→ $p(X<5)=p(X=0)+....+p(X=4)$
$=BinomFRep(9,0.5,4)=0,5$

→ $p(X\geq 8)=1-(X\leq 7)$
$=1-BinomFRep(9,0.5,7)=0,0195$

c. Déterminer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

→ $E(X)\simeq 4,5$

→ $\sigma(X)=\sqrt{4,5}\simeq 2,12$

EXERCICE 3A.4

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(n,p)$. Compléter le tableau suivant :

Evénements :	$B(3,0.25)$	$B(7,0.35)$	$B(15,0.04)$
Obtenir 2 succès	$p(X=2)$ $BinomFDP(3,0.25,2)$ $=0,140625$	$p(X=2)$ $BinomFDP(7,0.35,2)$ $=0,2985$	$p(X=2)$ $BinomFDP(15,0.04,2)$ $=0,0988$
Obtenir 5 succès	$p(X=5)$ $BinomFDP(3,0.25,5)$ $=0$ (impossible)	$p(X=5)$ $BinomFDP(7,0.35,5)$ $\simeq 0,0466$	$p(X=5)$ $BinomFDP(15,0.04,5)$ $\simeq 0,0002$
Obtenir au moins 2 succès	$p(X\geq 2)=1-p(X\leq 1)$ $=1-BinomFRep(3,0.25,1)$ $=0,15625$	$p(X\geq 2)=1-p(X\leq 1)$ $=1-BinomFRep(7,0.35,1)$ $=0,7662$	$p(X\geq 2)=1-p(X\leq 1)$ $=1-BinomFRep(15,0.04,1)$ $=0,1191$
Obtenir au plus 1 succès	$p(X\leq 1)=1-p(X\geq 2)$ $=1-0,15625$ $=0,84375$	$p(X\leq 1)=1-p(X\geq 2)$ $=1-0,7662$ $=0,2338$	$p(X\leq 1)=1-p(X\geq 2)$ $=1-0,1191$ $=0,8809$

EXERCICE 3A.5

Soit une variable aléatoire X qui correspond au nombre de « succès » dans une série d'épreuves.
Traduire mathématiquement chaque phrase :

Exemple : « La probabilité d'obtenir au moins 5 succès » : $p(X\geq 5)$

a. « La probabilité d'obtenir au moins 3 succès » : $p(X\geq 3)$

b. « La probabilité d'obtenir au plus 2 succès » : $p(X\leq 2)$

c. « La probabilité d'obtenir moins de 5 succès » : $p(X<5)=p(X\leq 4)$

d. « La probabilité d'obtenir 4 succès ou plus » : $p(X\geq 4)$

e. « La probabilité d'obtenir plus de 2 succès » : $p(X>2)=p(X\geq 3)$

f. « La probabilité d'obtenir exactement 7 succès » : $p(X=7)$

g. « La probabilité d'obtenir 1 succès ou moins» : $p(X\leq 1)$

h. « La probabilité de n'obtenir aucun succès » : $p(X=0)$

i. « La probabilité d'obtenir 6 succès au moins» : $p(X\geq 6)$

j. « La probabilité d'obtenir 1 succès au plus » : $p(X\leq 1)$