

I POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

1 DÉFINITION

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

EXEMPLES

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,5x^2 + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -0,5$, $b = 0$ et $c = \sqrt{2}$.
- La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x , $g(x) = 4x^2 + x + 1$ ($a = 4$, $b = 1$ et $c = 1$)
- La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \frac{3}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.

2 FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

* DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x , $f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$.

Or pour tout réel x , $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$. On en déduit que pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Soit en posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x , $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

EXEMPLE

Cherchons la forme canonique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.

Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \times \left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \right] \\ &= -2 \times \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} - 1 \right] \\ &= -2 \times \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x , $f(x) = -2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{25}{8}$

II VARIATIONS

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

* DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors pour tout réel x , $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

1. Étudions le cas où $a < 0$

Si $x_1 < x_2 \leq \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leq 0$ d'où $(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2$. (la fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$)

On en déduit que $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta < a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

Si $\alpha \leq x_1 < x_2$ alors $0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)^2$. (la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$)

On en déduit que $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

Ainsi, si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left] -\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right[$

2. Étudions le cas où $a > 0$

Si $x_1 < x_2 \leq \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leq 0$ d'où $(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2$.

On en déduit que $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

Si $\alpha \leq x_1 < x_2$ alors $0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)^2$.

On en déduit que $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta < a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

Ainsi, si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left] -\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right[$

On retient :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$a < 0$			$a > 0$		
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ \searrow		\searrow $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ \nearrow		

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Ici $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$. Ainsi, $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3}$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Comme $a < 0$, on en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$			

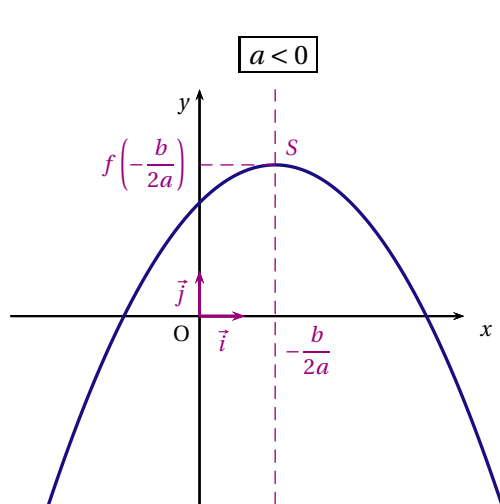
III COURBE REPRÉSENTATIVE

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole.

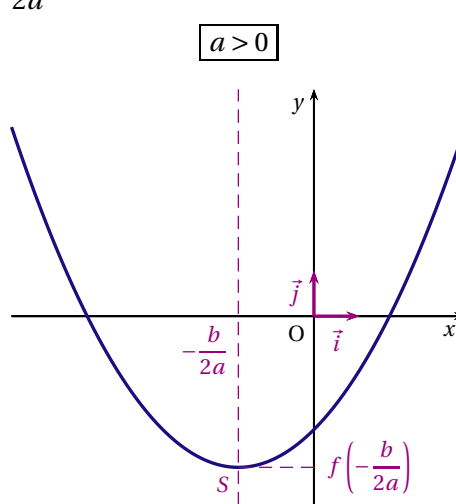
On dit que la parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$

Le sommet S de la parabole a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Il correspond au maximum ou au minimum sur \mathbb{R} de la fonction f .

La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$



La parabole est tournée vers le bas



La parabole est tournée vers le haut

SYMÉTRIE DE LA PARABOLE

Pour des raisons de symétrie, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des abscisses x_1 et x_2 de deux points de la parabole ayant même ordonnée : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 - 6x - 5$ où a , b et c sont trois réels.

Déterminons deux points de la courbe représentative de la fonction f ayant la même ordonnée.

Cherchons les solutions de l'équation $f(x) = -5$

$$2x^2 - 6x - 5 = -5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0$$

Soit $x = 0$ ou $x = 3$. Par conséquent, le sommet de la parabole a pour abscisse $\alpha = \frac{0+3}{2} = 1,5$

IV ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Une équation du second degré à une inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b , c sont des réels et $a \neq 0$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ équivaut à l'équation $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$,

soit encore $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$.

— Si $\Delta < 0$ alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Donc l'équation du second degré n'a pas de solution.

— Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ équivaut à l'équation $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$. Donc l'équation du second degré a pour unique solution $x = -\frac{b}{2a}$.

— Si $\Delta > 0$ alors :

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation du second degré a deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

1 PROPRIÉTÉ

Soit S l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des réels fixés avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution; $S = \emptyset$.

— Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution; $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.

— Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions; $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

EXEMPLE

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $6x^2 - 3 = 7x$

Pour tout réel x , $6x^2 - 3 = 7x \Leftrightarrow 6x^2 - 7x - 3 = 0$. Il s'agit de résoudre une équation du second degré avec $a = 6$, $b = -7$ et $c = -3$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-3) = 49 + 72 = 121$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{7 - 11}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{7 + 11}{12} = \frac{3}{2}$$

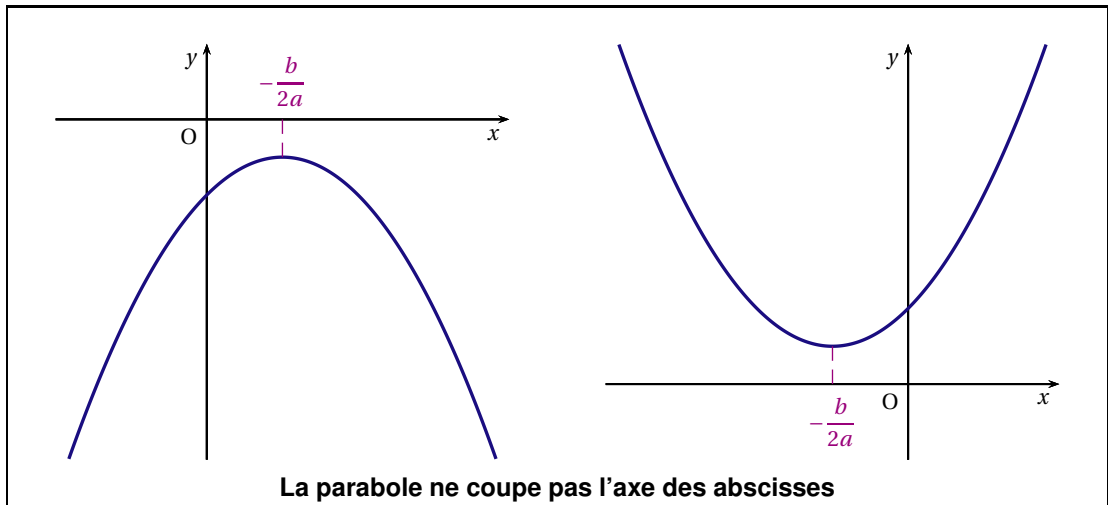
L'ensemble des solutions de l'équation $6x^2 - 3 = 7x$ est $S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right\}$

2 INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

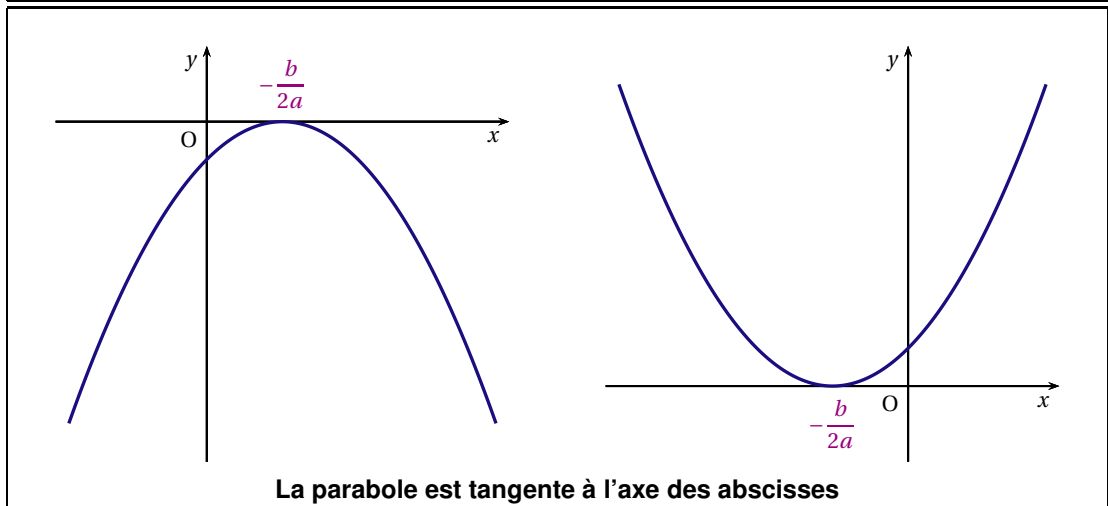
cas $a < 0$

cas $a > 0$

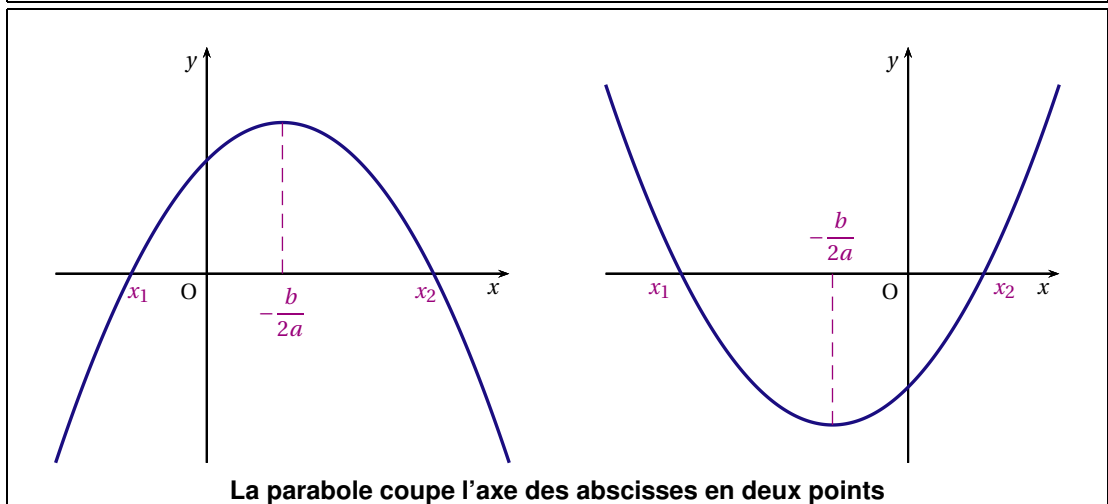
$\Delta < 0$



$\Delta = 0$



$\Delta > 0$



REMARQUE

Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées les racines du trinôme

$$ax^2 + bx + c$$

V SIGNE DU TRINÔME

1 FACTORISATION

Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$ en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$ en notant x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

* DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

— Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs; le trinôme ne se factorise pas.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$. Soit en notant $x_0 = -\frac{b}{2a}$ l'unique racine on a :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

— Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$. Soit en notant $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ les deux racines on a :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

PROPRIÉTÉ

Soit f un polynôme du second degré défini sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de a .
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et $f(x)$ est du signe contraire de celui de a pour tout réel $x \in]x_1; x_2[$.

* DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs donc le signe du trinôme est le signe de a pour tout réel x .

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ donc $f(x)$ est nul pour $x = -\frac{b}{2a}$; pour les autres valeurs de x le signe du trinôme est le signe de a .

— Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Étudions le signe du produit $a(x - x_1)(x - x_2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$a(x - x_1)(x - x_2)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

REMARQUE

On retiendra la règle « Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines.

EXEMPLES

1. Résoudre l'inéquation $-\frac{x^2}{4} - x + 3 \leq 0$.

Étudions le signe du trinôme $-\frac{x^2}{4} - x + 3$ avec $a = -\frac{1}{4}$, $b = -1$ et $c = 3$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times 3 = 1 + 3 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{1 - 2}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{1 + 2}{-\frac{1}{2}} = -6$$

Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines. Ainsi :

x	$-\infty$	-6	2	$+\infty$	
Signe du trinôme $-\frac{x^2}{4} - x + 3$	-	0	+	0	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-\frac{x^2}{4} - x + 3 \leq 0$ est $S =]-\infty; -6] \cup [2; +\infty[$.

2. Étudier les positions relatives de la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$ avec la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x - 3$
Les positions relatives de la parabole et de la droite se déduisent du signe de

$$x^2 - (2x - 3) = x^2 - 2x + 3$$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$.

Comme $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a donc pour tout réel x , $x^2 - 2x + 3 > 0$.

La parabole \mathcal{P} est au dessus de la droite \mathcal{D} .

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$								
$a > 0$	Variations	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-\frac{b}{2a}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table>			x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
	$f(x)$											
	Courbe											
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$									
Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement positif sur \mathbb{R}	Positif sur \mathbb{R}	Positif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Négatif sur $[x_1; x_2]$									
$a < 0$	Variations	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-\frac{b}{2a}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table>			x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
	$f(x)$											
	Courbe											
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$									
Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement négatif sur \mathbb{R}	Négatif sur \mathbb{R}	Négatif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Positif sur $[x_1; x_2]$									