Chapitre 3 – Polynômes du second degré

I – Définitions

<u>Définition :</u> On appelle *fonction polynôme* du second degré (ou *trinôme* du second degré) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des réels $a\neq 0$, b , c tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on ait : $P(x)=a\,x^2+b\,x+c$.
L'expression $a\,x^2+b\,x+c$ est appelée <u>un polynôme du second degré</u>.

<u>*Exemples :*</u>

- *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3\,x^2+x+\sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré. On a ici $a=-3$, $b=1$, $c=\sqrt{2}$.*
- *La fonction carré f est une fonction polynôme du second degré, puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $f(x)=x^2=1\,x^2+0\,x+0$. On a ici $a=1$, $b=0$, $c=0$.*

<u>Définition :</u> Soit P un trinôme du second degré de forme réduite $P(x)=a\,x^2+b\,x+c$ (avec $a\neq 0$). On appelle <u>discriminant</u> du trinôme le réel noté Δ défini par $\Delta=b^2-4\,a\,c$.

<u>*Exemple :*</u> *Pour $P(x)=5\,x^2-2\,x+3$, on a $\Delta=(-2)^2-4\times 5\times 3=-56$ puisque $a=5$, $b=-2$ et $c=3$.*

II – Forme canonique d'un trinôme du second degré

<u>Théorème :</u> Un trinôme P du second degré $P(x)=a\,x^2+b\,x+c$ (avec $a\neq 0$) s'écrit de façon unique sous la forme $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, appelée *forme canonique* du trinôme P .
On a $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}$; de plus, $P(\alpha)=\beta$.

<u>Preuve de l'existence :</u> On développe :

$a(x-\alpha)^2+\beta=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x^2+2\,x\,\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\frac{b^2-4ac}{4a}$ donc

$a(x-\alpha)^2+\beta=a\,x^2+\frac{2\,a\,x\,b}{2a}+\frac{a\,b^2}{4\,a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\,x^2+b\,x+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\,x^2+b\,x+\frac{b^2-b^2+4ac}{4a}$

$a(x-\alpha)^2+\beta=a\,x^2+b\,x+c$.

On a $P(\alpha)=a(\alpha-\alpha)^2+\beta=a\times 0+\beta=\beta$.

<u>*Exemple :*</u> *Pour $P(x)=x^2-3\,x+7$, on a $\Delta=(-3)^2-4\times 1\times 7=-19$. On a $\alpha=-\frac{-3}{2\times 1}=\frac{3}{2}$ et $\beta=-\frac{-19}{4\times 1}=\frac{19}{4}$. La forme canonique est donc $P(x)=1\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$.*

III – Racines et factorisation d'un trinôme du second degré

<u>Définition :</u> Soient P un polynôme du second degré et x_0 un réel.
On dit que x_0 est une *racine réelle* de P lorsque $P(x_0)=0$.

<u>Théorème :</u> Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$ un trinôme du second degré et Δ son discriminant.

- **Si $\Delta>0$, alors P admet deux racines réelles *distinctes* :**
  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- **Si $\Delta=0$, alors P admet une seule racine réelle, appelée racine *double* :**
  $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=a(x-x_0)^2$.
- **Si $\Delta<0$, alors P n'admet aucune racine réelle, et on ne peut pas factoriser $P(x)$.**

<u>*Exemples :*</u>

- $P(x)=5x^2-10x-5$
- $Q(x)=x^2-4x\sqrt{3}+12$
- $R(x)=3x^2-4x+2$

<u>Preuve :</u> La forme canonique étant $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$, on factorise les deux termes par $a\neq 0$: $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta>0$, on a $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$, et on peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable :
  $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=a\left(x-\left(\dfrac{-b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x-\left(\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$ donc
  $P(x)=a\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. On a obtenu la factorisation cherchée, et en résolvant l'équation produit $P(x)=0$ avec $a\neq 0$, on obtient comme racines distinctes $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta=0$, on a donc $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=a\left(x-\dfrac{-b}{2a}\right)^2$. On a bien la factorisation souhaitée, et en résolvant l'équation produit $P(x)=0$ avec $a\neq 0$, on obtient comme racine $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)\neq 0$. P n'a donc pas de racine réelle.
  Supposons que l'on puisse factoriser P . P étant de degré 2, on pourrait le factoriser par $(x-x_0)$, x_0 étant un réel. $P(x_0)=0$ puisque $x_0-x_0=0$, donc x_0 serait une racine, or P n'en a pas. Donc on ne peut pas factoriser P .

Remarque : Le cas $\Delta=0$ correspond au cas où, après avoir factorisé P par $a\neq 0$, on peut utiliser directement une identité remarquable. Le cas $\Delta=0$ peut être vu comme un cas particulier de $\Delta>0$: on a alors $x_1=x_0$ et $x_2=x_0$, ce qui justifie l'utilisation de l'expression « racine double ».

IV – Signe et variations d'une fonction polynôme du second degré

a) Variations d'une fonction polynôme du second degré

Soit P une fonction polynôme du second degré de forme réduite $P(x)=a x^2+b x+c$ avec $a\neq 0$.
Sa forme canonique est $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}$.

Théorème : On a vu en classe de seconde que P a comme tableau de variation sur $\mathbb{R}$:

Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
P		↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	

Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
P		↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	

b) Représentation graphique

En admettant que la fonction P est représentée par une parabole, on a ce résultat immédiat :

Théorème : La courbe représentative de la fonction $P(x)=a x^2+b x+c$ (avec $a\neq 0$) est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemple : Soit $P(x)=x^2-x-12$.
$\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-12)=1+48=49$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S\left(-\frac{-1}{2\times 1};-\frac{49}{4\times 1}\right)$, soit $S\left(\frac{1}{2};-\frac{49}{4}\right)$.

c) Signe d'un trinôme

En dressant le tableau de signe de $P(x)$ lorsque $\Delta \geqslant 0$, ou en remarquant comme nous l'avons fait que si $\Delta < 0$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$, on peut en déduire les tableaux de signe de $P(x)$:

Propriété : **Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.**

- **Si $\Delta > 0$, on a ce tableau de signe (on appelle x_1 la plus petite racine)**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	**0**	**Signe de $-a$**	**0**	**Signe de a**	

- **Si $\Delta = 0$, on a ce tableau de signe :**

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	**0**	**Signe de a**	

- **Si $\Delta < 0$, on a ce tableau de signe :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	

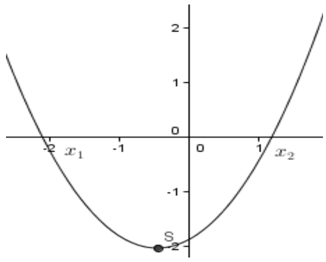
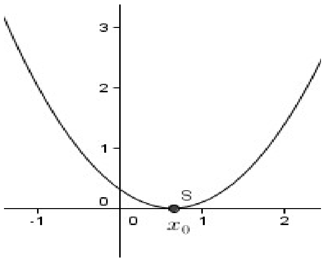
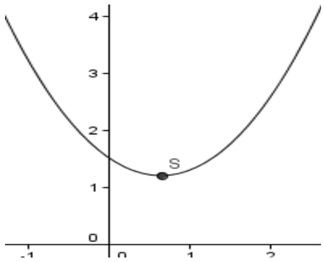
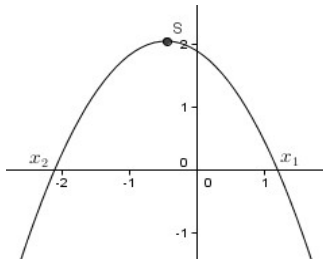
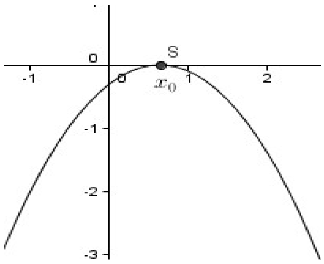
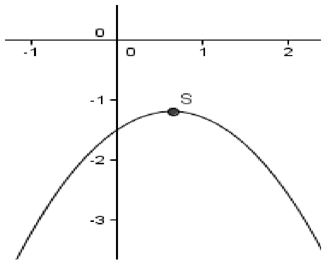
En résumé, le trinôme est du signe de a sauf entre les racines lorsque $\Delta > 0$.

V – Tableau récapitulatif des trinômes du second degré

$$P(x)=a x^2+b x+c \text{ (avec } a\neq 0\text{)}$$

Discriminant $\Delta=b^2-4ac$

Coordonnées du sommet $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

<table>
<tr><th></th><th>$\Delta>0$</th><th>$\Delta=0$</th><th>$\Delta<0$</th></tr>
<tr><td>Solutions de l'équation $a x^2+b x+c=0$</td><td>$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>$x_0=-\frac{b}{2a}$
(racine double)</td><td>Pas de solution</td></tr>
<tr><td>Factorisation de $a x^2+b x+c$</td><td>$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>$a(x-x_0)^2$</td><td>Pas de factorisation</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique quand $a>0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Représentation graphique quand $a<0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de $a x^2+b x+c$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty \quad & x_1 & & x_2 & \quad +\infty \\ \hline P(x) & \text{signe de } a & 0 & \text{signe de } -a & 0 & \text{signe de } a \end{array}$

(en notant x_1 la plus petite racine)</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty \quad & x_0 & \quad +\infty \\ \hline P(x) & \text{signe de } a & 0 & \text{signe de } a \end{array}$</td><td>$\begin{array}{c|cc} x & -\infty & +\infty \\ \hline P(x) & \text{signe de } a & \end{array}$</td></tr>
</table>