CORRIGE – LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 5B.1

Soit la fonction définie sur [-6 ; 3] par :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 5$$

a. f est définie, continue et dérivable sur [-6 ; 3].

f '(x) = $-2x-4$ → $-2x-4>0 \Leftrightarrow x<-2$

ainsi **f'(x) > 0** sur [-6 ; -2[

et **f'(x) < 0** sur]-2 ; 3]

b. Tableau de variation de f sur [-6 ; 3] :

x	-6		-2		3
f'(x)		+	0	−	
f(x)	−7	↗	9	↘	−16

c. Points d'intersection de f avec l'axe (Ox) :

f(x) = 0 $\Leftrightarrow -x^2-4x+5=0$

$$\Delta=(-4)^2-4\times(-1)\times 5=36=6^2$$

$$x_1=\frac{4-6}{2\times(-1)}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4+6}{2\times(-1)}=-5$$

On obtient les points **A(1 ; 0)** et **B(-5 ; 0)**

Point d'intersection de f avec l'axe (Oy) :

$$f(0)=-0^2-4\times 0+5=5$$

On obtient le point **C(0 ; 5)**

d. Les coefficients directeurs des tangentes ($\mathcal{T}_A$), ($\mathcal{T}_B$) et ($\mathcal{T}_C$) à la courbe $\mathcal{C}$ aux points A, B et C d'abscisses respectives -5, -2 et 1, sont respectivement donnés par les valeurs :

f '(-5) = $-2\times(-5)-4=6$

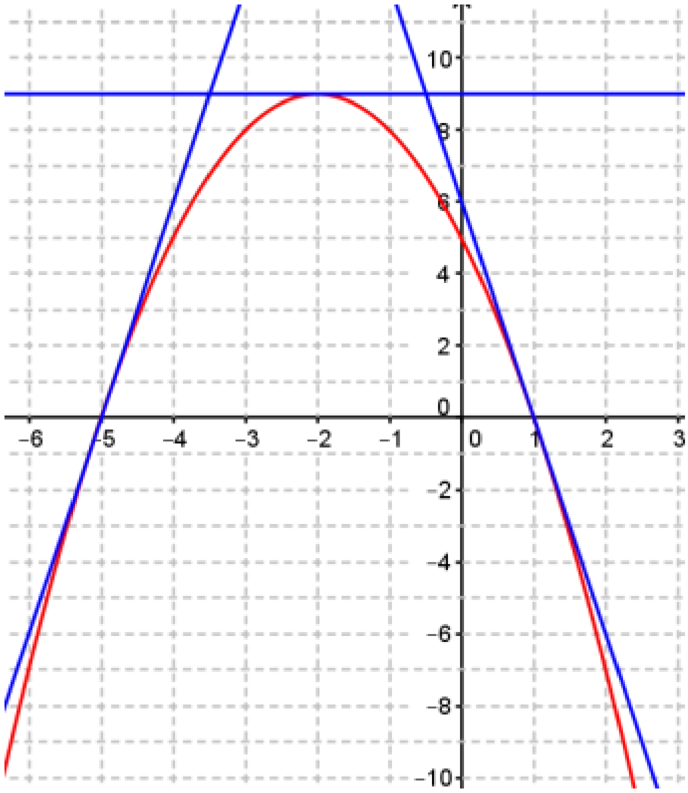
f '(-2) = $-2\times(-2)-4=0$

f '(1) = $-2\times 1-4=-6$

e. (T_A) : **y = f '(-5) (x + 5) + f (-5) = 6x + 30**

(T_B) : **y = f '(-2) (x + 2) + f (-2) = 9**

(T_C) : **y = f '(1) (x - 1) + f (1) = -6x + 6**



EXERCICE 5B.2

Soit la fonction définie sur [-1 ; 2] par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$$

a. f est définie, continue et dérivable sur [-1 ; 2].

f '(x) = $6x^2-6x=6x(x-1)$

→ $6x>0 \Leftrightarrow x>0$

→ $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

ainsi **f'(x) < 0** sur [0 ; 1[

et **f'(x) > 0** sur [-1 ; 0[∪]1 ; 2]

b. Tableau de variation de f sur [-1 ; 2] :

x	-1		0		1		2
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	-7	↗	−2	↘	-3	↗	2

c. Point d'intersection de f avec l'axe (Oy) :

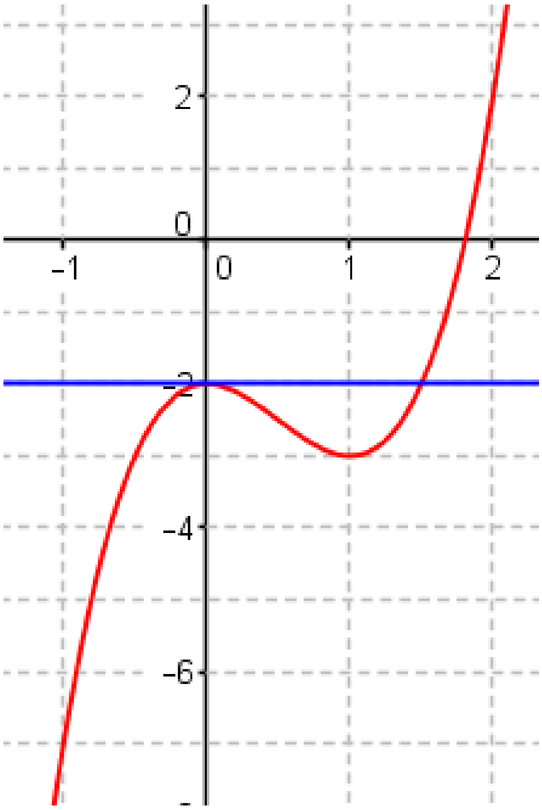
f (0) = -2 →on obtient le point **A(0 ; -2)**

Coefficient directeur de la tangente en ce point :

f '(0) = $6\times 0(0-1)=0$

d. **f (1) = -3** et **f (2) = 2** et **la fonction est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 2].** D'après le **théorème des valeurs intermédiaires :** $\mathcal{C}$ coupe l'axe (Ox) dans l'intervalle **[1 ; 2]**.

e. Construire dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que ses tangentes (Unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).



EXERCICE 5B.3

Soit la fonction définie sur [-1 ; 3] par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

a. f est définie, continue et dérivable sur [-1 ; 3].

f ′(x) = $3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3\left(x-1\right)^2$

Ainsi **f′(x) ≥ 0** sur [-1 ; 3].

b. Tableau de variation de f sur [-1 ; 3] :

x	-1		1		3
f′(x)		+	0	+	
f(x)	–9	↗	-1	↗	7

c. Point d'intersection de f avec l'axe (Oy) :

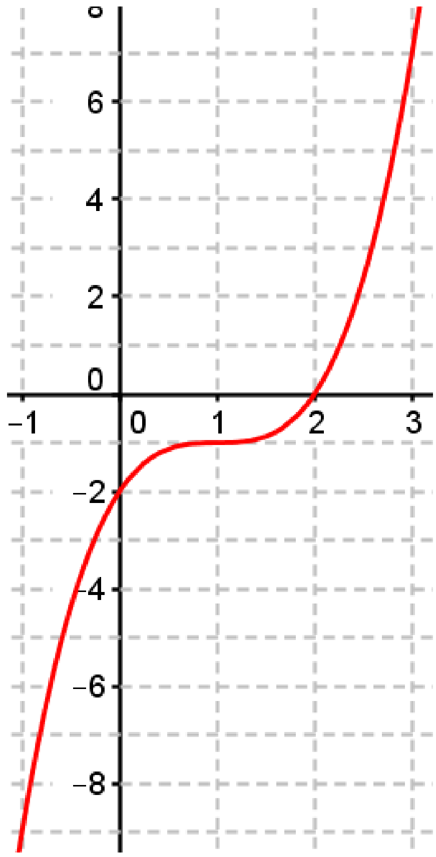
f (0) = -2 →on obtient le point **A(0 ; -2)**

Coefficient directeur de la tangente en ce point :

f ′(0) = $3\left(0-1\right)^2 = 3$

d. **f (1) = -1** et **f (3) = 7** et **la fonction est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 3].** D'après le **théorème des valeurs intermédiaires :** $\mathscr{C}$ coupe l'axe (Ox) dans l'intervalle **[1 ; 3]**.

e. Construire dans un repère la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses tangentes (Unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).



EXERCICE 5B.4

Soit la fonction définie sur [-1,5 ; 3] par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

a. f est définie, continue et dérivable sur [-1,5 ; 3].

f ′(x) = $\dfrac{\left(x+2\right)-\left(x+1\right)}{\left(x+2\right)^2} = \dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}$

Ainsi **f′(x) ≥ 0** sur [-1,5 ; 3].

b. Tableau de variation de f sur [-1,5 ; 3].

x	-1,5		3
f′(x)		+	
f(x)	–1	↗	0,8

c. Point d'intersection de f avec l'axe (Ox) :

f(x) = 0 $\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

→on obtient les points **A(-1 ; 0)**

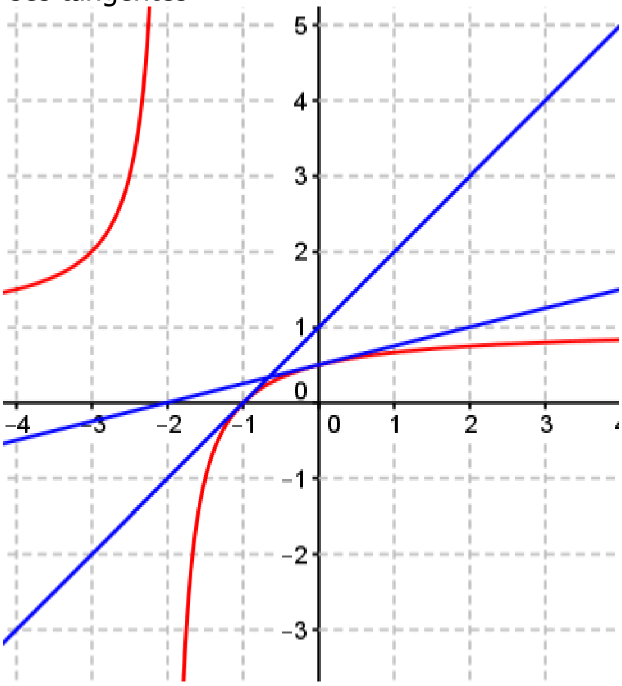
Point d'intersection de f avec l'axe (Oy) :

f (0) = 0,5 →on obtient le point **B(0 ; 0,5)**

d. Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'intersection avec les axes sont respectivement :

f ′(-1) = 0,25 et **f ′(0) =** $\dfrac{1}{\left(0+2\right)^2} = \dfrac{1}{4}$

e. Construire dans un repère la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses tangentes



EXERCICE 5B.5

Soit la fonction définie sur [-5 ; 5] par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$$

a. f est définie, continue et dérivable sur [-5 ; 5].

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{\left(x^2+3\right)-(x-1)\times 2x}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 3 = 16 = 4^2$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{2\times(-1)} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+4}{2\times(-1)} = -1$$

Ainsi **$f'(x) \geq 0$** sur [-1 ; 3]
et **$f'(x) < 0$** sur [-5 ; -1[$\cup$]3 ; 5].

b. Tableau de variation de f sur [-5 ; 5] :

x	-5		-1		3		5
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	−0,21	↘	−0,5	↗	0,17	↘	0,14

c. Point d'intersection de f avec l'axe (Ox) :

f(x) = 0 $\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

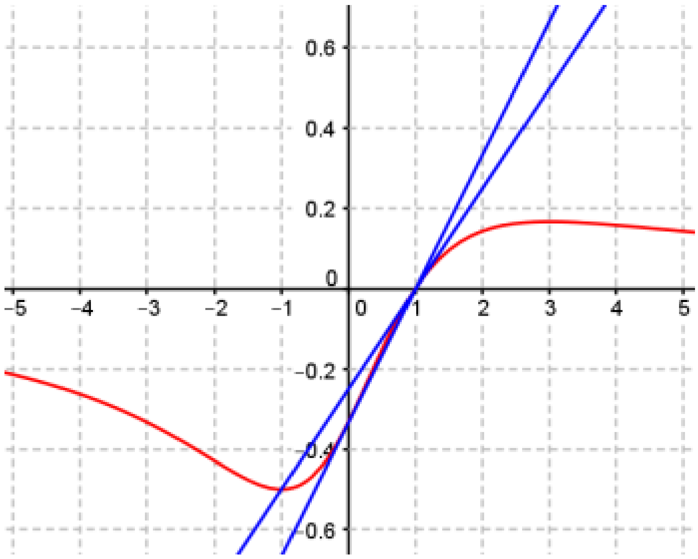
→on obtient le point **A(1 ; 0)**

Point d'intersection de f avec l'axe (Oy) :

f (0) = $-\frac{1}{3}$ →on obtient le point **B** $\left(0;-\frac{1}{3}\right)$

d. Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'intersection avec les axes sont respectivement :

f '(1) = $\frac{1}{4}$ et **f '(0) =** $\frac{1}{3}$



EXERCICE 5B.6

Soit la fonction définie sur [-2 ; 3] par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

a. f est définie, continue et dérivable sur [-2 ; 3].

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ainsi **$f'(x) > 0$** sur [-2 ; 3]

b. Tableau de variation de f sur [-2 ; 3] :

x	-2		3
f'(x)		+	
f(x)	−1	↗	$\sqrt{5}-1$

c. Point d'intersection de f avec l'axe (Ox) :

f(x) = 0 $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=1 \Leftrightarrow x+2=1$

$\Leftrightarrow x=-1$ →on obtient le point **A(-1 ; 0)**

Point d'intersection de f avec l'axe (Oy) :

f (0) = $\sqrt{2}-1$

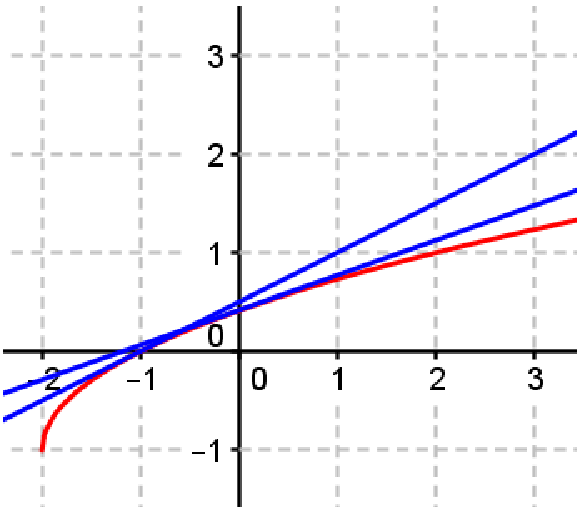
→on obtient le point **B** $\left(0;\sqrt{2}-1\right)$

d. Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'intersection avec les axes sont respectivement :

f '(-1) = $\frac{1}{2}$ et **f '(0) =** $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

e. Tangentes : y = 0,5 x + 0,5

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2} - 1$$



EXERCICE 5B.7

Soit f la fonction définie sur [-3 ; 4] par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$$

1. a. f est définie, continue et dérivable sur [-3 ; 4].

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12$

b. $f'(3) = 4\times3^3 - 6\times3^2 - 22\times3 + 12$

$= 108 - 54 - 66 + 12 = 0$

donc 3 est une racine de f′(x).

c. $f'(x) = (x-3)\left(4x^2+6x-4\right)$

d. P(x) = $2\left(2x^2+3x-2\right)$

$\Delta = 3^2 - 4\times2\times(-2) = 25 = 5^2$

$x_1 = \dfrac{-3-5}{2\times2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2\times2} = 0{,}5$

e. Ainsi $P(x) \geq 0$ sur [-3 ; -2] ∪ [0,5 ; 4].
et $P(x) < 0$ sur]-2 ; 0,5[

Or $x-3>0$ sur [3 ; 4].
$x-3<0$ sur [-3 ; 3].

Donc $f'(x) \geq 0$ sur [-2 ; 0,5] ∪ [3 ; 4].
et $f'(x) \leq 0$ sur [-3 ; -2] ∪ [0,5 ; 3].

2. Tableau de variation de f sur [-3 ; 4] :

x	-3		-2		0,5		3		4
f′(x)		−	0	+	0	−	0	+	
f(x)	0	↘	-36	↗	3,0625	↘	-36	↗	0

c.

3. a. $f(-3) = f(0) = f(1) = f(4) = 0$

donc -3, 0 et 1 sont des racines de f(x).

b. 𝒞 coupe 4 fois l'axe des abscisses.

c. Coefficients directeurs des tangentes ($\mathfrak{T}_A$), ($\mathfrak{T}_B$) et ($\mathfrak{T}_C$) à la courbe 𝒞 aux points A, B et C d'abscisses respectives -3, 0 et 1 :

$f'(-3) = (-3-3)\left(4(-3)^2+6\times(-3)-4\right) = -84$

$f'(0) = (0-3)\left(4\times0^2+6\times0-4\right) = 12$

$f'(1) = (1-3)\left(4\times1^2+6\times1-4\right) = -12$

4. Tangentes ($\mathfrak{T}_A$) : $y = -84x - 252$
($\mathfrak{T}_B$) : $y = 12x$
($\mathfrak{T}_C$) : $y = -12x + 12$