Équations et inéquations du premier degré

Équation du 1^er^ degré

On isole l'inconnue dans une équation du 1er degré, en développant ou en multipliant par de dénominateur commun si nécessaire. On obtient alors :

$$ax = b$$

- Si $a \neq 0$, une solution $x = \dfrac{b}{a}$ d'où $S = \left\{\dfrac{b}{a}\right\}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, impossible d'où $S = \varnothing$.
- Si $a = 0$ et $b = 0$, toujours vrai d'où $S = \mathbb{R}$

Factorisation

On peut factoriser de deux façons :

- Par un facteur commun : $ab + ac = a(b + c)$
- Par une identité remarquable :
  — Par une différence de deux carrés :
  $$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
  — par un carré parfait :
  $$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Inéquation du 1er degré

On isole l'inconnue dans une inéquation du 1er degré. On obtient alors :

$$ax \leqslant b \text{ ou } ax < b \text{ ou } ax > b \text{ ou } ax \geqslant b$$

- Si $a \neq 0$, on divise par a

  $a > 0$, on ne change pas l'inégalité

  $a < 0$, ⚠ on inverse l'inégalité

  On obtient une section commençante ou finissante.
- Si $a = 0$, on obtient $S = \varnothing$ ou $S = \mathbb{R}$

Équation produit

Lorsque l'équation est de degré supérieur à 1, on annule le second membre.

Si le premier membre peut se factoriser en facteurs du 1er degré, on applique l'intégrité de la multiplication :

$$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ ou } b = 0$$

En cas d'égalité de deux carrés, on applique la règle

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ ou } a = -b$$

Inéquation produit

Lorsque l'inéquation est de degré supérieur à 1, on annule le second membre.

- On factorise le premier membre
- On détermine les valeurs frontières.
- On remplit un tableau de signes puis on résout l'inéquation à l'aide du tableau.

Équation quotient

Si l'inconnue apparaît au dénominateur :

- On détermine l'ensemble de définition D_f.
- En cas d'égalité de deux fractions on effectue un produit en croix.
- Sinon, on multiplie par le dénominateur commun.
- On résout l'équation en vérifiant que la ou les solutions appartiennent à l'ensemble de définition.

Signe du binôme $ax + b$

Lorsque l'on cherche le signe de $ax + b$:

- On détermine la valeur frontière : $x = -\dfrac{b}{a}$
- On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a
$a > 0$	$-$	0	$+$
$a < 0$	$+$	0	$-$

Inéquation quotient

Lorsque l'inconnue apparaît au dénominateur :

- On détermine l'ensemble de définition D_f.
- On annule le second membre.
  ⚠ Pas de produit en croix !!
- On réduit au même dénominateur le premier membre en factorisant si nécessaire.
- On détermine les valeurs frontières.
- On remplit un tableau de signes en mettant une double barre pour la ou les valeurs interdites puis on résout l'inéquation à l'aide du tableau.

Exemples de résolution d'équations

- **Premier degré**

$$\frac{x+2}{3}-\frac{3(x-2)}{4}=\frac{-7x+2}{12}+2$$

$(\times 12)\quad 4(x+2)-9(x-2)=-7x+2+24$

$$4x+8-9x+18=-7x+2+24$$

$$2x=0 \iff x=0, \qquad \text{soit} \quad S=\{0\}$$

- **Équation produit**

$$(x-1)(2x+3)=(x-1)(x-6)$$
$$(x-1)(2x+3)-(x-1)(x-6)=0$$
$$(x-1)(2x+3-x+6)=0$$
$$(x-1)(x+9)=0 \qquad \text{soit} \quad S=\{-9;1\}$$

- **Égalité de deux carrés**

$$(5x+2)^2=(x+1)^2$$
$$5x+2=x+1 \quad \text{ou} \quad 5x+2=-x-1 \quad \text{soit} \quad S=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right\}$$

- **Équation quotient**

$$\frac{x-3}{2x-4}=\frac{x-2}{2x-5} \qquad D_f=\mathbb{R}-\left\{2\,;\,\frac{5}{2}\right\}$$

$x\in D_f$ produit en croix

$$(x-3)(2x-5)=(x-2)(2x-4)$$
$$2x^2-5x-6x+15=2x^2-4x-4x+8$$
$$-5x-6x+4x+4x=-15+8$$
$$-3x=-7 \iff x=\frac{7}{3}\in D_f \quad \text{soit} \quad S=\left\{\frac{7}{3}\right\}$$

$$\frac{-4}{x-4}+\frac{1}{x}=\frac{-3}{x-3} \qquad D_f=\mathbb{R}^*-\{3\,;\,4\}$$

$x\in D_f$ on multiplie par $x(x-4)(x-3)$

$$-4x(x-3)+(x-4)(x-3)=-3x(x-4)$$
$$-4x^2+12x+x^2-3x-4x+12=-3x^2+12x$$
$$-4x^2+x^2+3x^2-3x-4x=-12$$
$$-7x=-12 \iff x=\frac{12}{7}\in D_f \qquad \text{soit} \quad S=\left\{\frac{12}{7}\right\}$$

Exemples de résolution d'inéquations

- **Premier degré**

$$2(x-1)-3(x+1)>4(3x+2)$$
$$2x-2-3x-3>12x+8$$
$$-13x>13 \iff x<-1 \qquad \text{soit} \quad S=]-\infty\,;\,-1[$$

- **Inéquation produit**

$$(x-5)(x-2)<(x-5)(2x-3)$$
$$(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3)<0$$
$$(x-5)(x-2-2x+3)<0$$
$$(x-5)(-x+1)<0 \qquad S=]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,5\,;\,+\infty\,[$$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(x-5)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **Inéquation quotient**

$$\frac{4}{x+1}\leqslant 3 \qquad D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$$

$$\frac{4}{x+1}-3\leqslant 0 \iff \frac{-3x+1}{x+1}\leqslant 0 \qquad S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-3x+1}{x+1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	