CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 1A.1 : PILE OU FACE

1. On va simuler N lancers d'une pièce à l'aide de la machine. Pour cela on va générer une liste de N nombres aléatoires choisis entre 1 (pour « PILE ») et 2 (pour « FACE), puis compter la fréquence d'apparition de chaque « PILE ».
TI83 → Math → PROB → 5 :

NbrAleaEnt(1 , 2 , 20) STO L_1
TI83 → Listes → MATH → 3 :moy(
→ le signe = s'obtient dans tests
$\text{Moy}\left(L_1 = 1\right)$
compte la fréquence de « 1 » dans la Liste 1.

On répètera 4 fois l'expérience 20 lancers :

	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Echantillon 4	
Résultat	Pile	Face	Pile	Face	Pile	Face	Pile	Face
Fréquence	**0,6**	**0,4**	**0,4**	**0,6**	**0,45**	**0,55**	**0,6**	**00,5**

Puis on répètera 4 fois l'expérience 200 lancers :

	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Echantillon 4	
Résultat	Pile	Face	Pile	Face	Pile	Face	Pile	Face
Fréquence	**0,525**	**0,475**	**0,485**	**0,515**	**0,5**	**0,5**	**0,53**	**0,47**

On observe que les fréquences de chaque échantillon sont proches, mais rarement égales. Les résultats subissent des **fluctuations** d'autant plus importantes que l'échantillon est de **petite** taille.

2. On considère le jeu suivant : on lance 20 fois une pièce, et on parie sur le nombre total de « PILE ».
On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de « PILE » sur 20 lancers.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ? $n = 20$ $p = 0,5$

b. A l'aide de la machine, compléter le tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p\left(X = x_i\right)$	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	0,001	0,005	0,015	0,037	0,074	0,12	0,16	0,176

x_i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
$p\left(X = x_i\right)$	0,16	0,12	0,074	0,037	0,015	0,005	0,001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	1

c. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.
$E = np = 20 \times 0,5 = 10$: en moyenne, on obtient 10 PILE.

d. A l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 10 « PILE » ? → $p(X = 10) = 0,176$
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement entre 9 et 11 « PILE » ? → $p(9 \le X \le 11) = 0,496$
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement entre 8 et 12 « PILE » ? → $p(8 \le X \le 12) = 0,736$
- Quel est le *plus petit intervalle centré sur 10* auquel X appartiendra avec une probabilité d'au moins 90% ?
→ $p(X \le 5) = 0,021$ et $p(X \le 6) = 0,058$: l'intervalle cherché est $[6;14]$
En effet : $p(5 \le X \le 15) = 0,988$ et $p(6 \le X \le 14) = 0,959$ et $p(7 \le X \le 13) = 0,884$
- Quel est le *plus petit intervalle centré sur 10* auquel X appartiendra avec une probabilité d'au moins 95% ?
→ $p(X \le 5) = 0,021$ et $p(X \le 6) = 0,058$: l'intervalle cherché est $[6;14]$

EXERCICE 1A.2 : LANCER D'UN DE A 6 FACES.

1. On veut simuler N lancers d'un dé à 6 faces à l'aide de la machine, comme dans l'exercice précédent.
On répètera 4 fois l'expérience 18 lancers :

	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Echantillon 4	
Résultat	1 à 5	6	1 à 5	6	1 à 5	6	1 à 5	6
Fréquence	**0,778**	**0,222**	**0,889**	**0,111**	**0,944**	**0,056**	**0,722**	**0,278**

2. On considère le jeu suivant : on lance 18 fois un dé, et on parie sur le nombre total de « 6 ».
On appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de « 6 » sur 18 lancers.

a. On admet que Y suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ? $n=18$ $p=\frac{1}{6}$

b. A l'aide de la machine, compléter le tableau :

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(Y=y_i)$	0,038	0,135	0,23	0,245	0,184	0,103	0,045	0,015	0,004	0,001

y_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Total
$p(Y=y_i)$	2×10^{-4}	2×10^{-5}	3×10^{-6}	0	0	0	0	0	0	1

c. Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter ce résultat.

$E=np=18\times\frac{1}{6}=3$: en moyenne, on obtient 3 SIX.

d. A l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement entre 2 et 4 SIX ? $\rightarrow$ $p(2\le Y\le 4)=0,659$
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement entre 1 et 5 SIX ? $\rightarrow$ $p(1\le Y\le 5)=0,897$
- Quel est le *plus petit intervalle centré sur 3* auquel Y appartiendra avec une probabilité d'au moins 90% ?

$\rightarrow$l'intervalle $[1;5]$ centré sur 3 ne suffit pas : $p(1\le Y\le 5)=0,897<0,90$

$\rightarrow$l'intervalle cherché est $[6;14]$: $p(0\le X\le 6)\simeq 0,979$

- Quel est le *plus petit intervalle centré sur 3* auquel Y appartiendra avec une probabilité d'au moins 95% ?

$\rightarrow$l'intervalle cherché est $[6;14]$: $p(0\le X\le 6)\simeq 0,979$