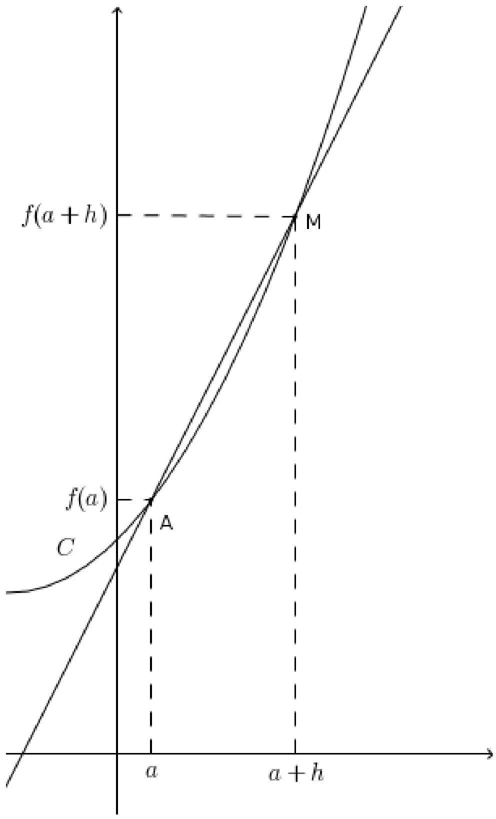
Chapitre 5 – Dérivation

I – Nombre dérivé et tangente

Dans toute cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle I, et a un réel appartenant à I. C est la courbe représentative de f.

a) Nombre dérivé d'une fonction en un réel



Soit $h \neq 0$ un réel. On considère A le point de C d'abscisse a, et M le point de C d'abscisse $a+h$. A a donc pour coordonnées $(a; f(a))$, et M a pour coordonnées $(a+h; f(a+h))$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est donc $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Ce rapport est le *taux d'accroissement* de f entre a et $a+h$.

Ce rapport n'existe pas quand $h = 0$, puisque l'on ferait une division par 0.

En revanche, on peut s'intéresser à ce qu'il devient quand h se rapproche de 0. On dit aussi « quand h tend vers 0 ».

<u>**Définition :**</u> **Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un réel, que l'on note $f'(a)$, tel que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$. Ce réel $f'(a)$, *s'il existe,* est le *nombre dérivé de la fonction f en a.***

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction carré (définie sur $\mathbb{R}$). Cherchons si f est dérivable en -3 :

Soit $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre -3 et $-3+h$ est :
$\frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \frac{(-3+h)^2 - (-3)^2}{h} = \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h$.
Comme $\lim_{h \to 0} 6+h = 6$, f est dérivable en -3 et $f'(-3) = 6$.

b) Tangente en un point à une courbe

Graphiquement, quand h tend vers 0, le point M se rapproche de A.

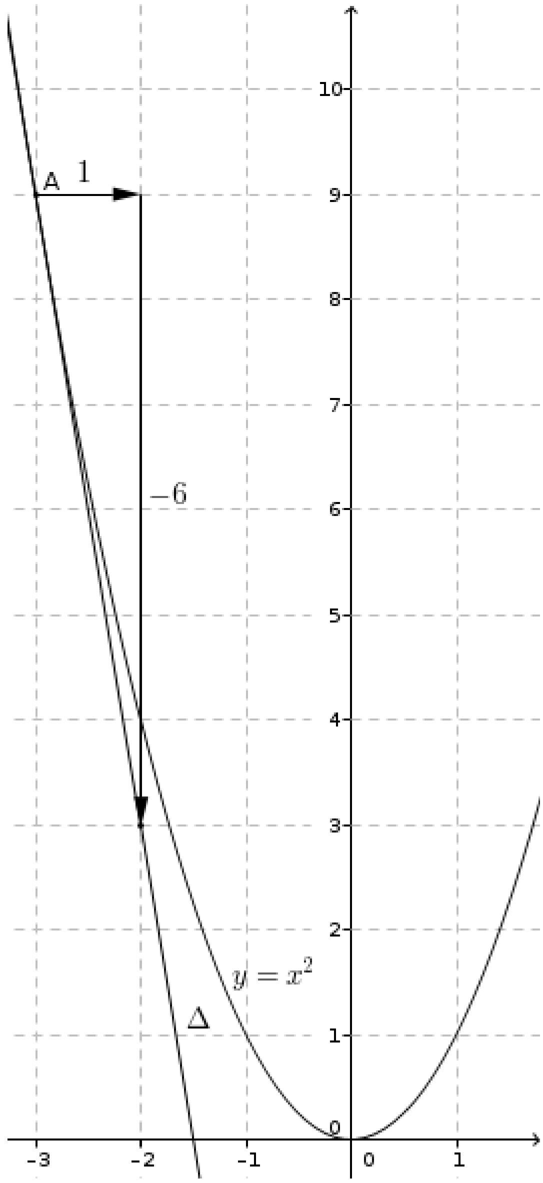
Dire que le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ tend vers $f'(a)$ revient donc à dire que le coefficient directeur de (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A.

<u>Définition :</u> Si f est dérivable en a, on appelle *tangente* en A à la courbe C la droite Δ qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

<u>Exemple :</u> On a déterminé précédemment que la fonction carré f était dérivable en -3 et que $f'(-3)=-6$.
Comme $f(-3)=(-3)^2=9$, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -3 est donc la droite passant par $A(-3;9)$ et ayant pour coefficient directeur -6.

Graphiquement, on constate que la tangente frôle la courbe en A.

On peut donc déterminer l'équation de Δ :
Son équation est $y=-6x+b$ or $A(-3;9)\in\Delta$ donc $9=-6\times 3+b \Leftrightarrow 9=18+b \Leftrightarrow -9=b$.
Δ a pour équation $\boldsymbol{y=-6x-9}$.



<u>Théorème :</u> Si f est dérivable en a, Δ a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

<u>Preuve :</u> L'équation de Δ est de la forme $y=f'(a)x+b$, puisque $f'(a)$ est son coefficient directeur. Comme $A(a, f(a))\in\Delta$, alors ses coordonnées vérifient l'équation :
$f(a)=f'(a)a+b$ donc $b=-f'(a)a+f(a)$, donc $y=f'(a)x-f'(a)a+f(a)$, soit
$\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

II – Fonction dérivée

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable pour tout $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I. La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la fonction dérivée de f et se note f'.

<u>Exemples :</u>

- *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$,*
  $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h.$$
  *Comme $\lim\limits_{h \to 0} 2x+h=2x$, **la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=2x$**.*

- *Soit g la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x}$. Pour $x \neq 0$ et $h \neq 0$, $h \neq -x$,*
  $$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h}=\frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h}=-\frac{h}{xh(x+h)}=-\frac{1}{x(x+h)}.$$
  *$\lim\limits_{h \to 0} -\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$ donc **g est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$**.*

<u>a) Dérivées des fonctions de référence</u>

D_f domaine de définition	$f(x)=$	$D_{f'}$ domaine de dérivabilité	$f'(x)=$
$\mathbb{R}$	k (constante)	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Exemple :</u> La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^8$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=8x^7$.

b) Somme de deux fonctions dérivables et produit d'une fonction dérivable par une constante

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I, et λ un réel. Alors :

- **La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)$.**
- **La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)'(x)=\lambda u'(x)$.**

Exemples :

- *f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x^3$.*
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
  $f'(x)=2x+3x^{3-1}=2x+3x^2$.
- *f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=3x^3-\dfrac{1}{x}$.*
  f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et
  $f'(x)=3\times 3x^2-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=9x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

c) Produit de deux fonctions dérivables

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I. Alors la fonction produit uv est dérivable sur I et $(uv)'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$.

Exemple : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3\times(4x-5)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$f(x)=u(x)v(x)$ *avec* $u(x)=2x^3$ *et* $v(x)=4x-5$. $u'(x)=2\times 3x^2=6x^2$ *et* $v'(x)=4$.
$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=6x^2(4x-5)+4\times 2x^3=6x^2(4x-5)+8x^3$.

d) Inverse d'une fonction dérivable

Théorème : Soit v une fonction dérivable sur un *intervalle* I, telle que v ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x)=-\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Exemple : f est définie sur $[10\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{4x-3}$.
f est dérivable sur $[10\,;+\infty[$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $[10\,;+\infty[$.

$f(x)=\dfrac{1}{v(x)}$ *avec* $v(x)=4x-3$. $v'(x)=4$.

$f'(x)=-\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^2}=-\dfrac{4}{(4x-3)^2}$.

e) Quotient de deux fonctions dérivables

Théorème : **Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I, telle que v ne s'annule pas sur I. Alors la fonction quotient $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et**

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}.$$

Exemple : *f est définie sur $[10;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2}{4x-3}$.*

f est dérivable sur $[10;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $[10;+\infty[$.

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ *avec* $u(x)=x^2$ *et* $v(x)=4x-3$. $u'(x)=2x$ *et* $v'(x)=4$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}=\frac{2x(4x-3)-4\times x^2}{(4x-3)^2}=\frac{8x^2-6x-4x^2}{(4x-3)^2}=\frac{4x^2-6x}{(4x-3)^2}.$$

Chapitre 6 – Dérivation et variations

I – Dérivée et sens de variation

a) Dérivée d'une fonction monotone

<u>Théorème :</u> Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I.

- **Si f est une fonction croissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.**
- **Si f est une fonction décroissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.**
- **Si f est constante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.**

<u>Exemple :</u> La fonction carrée f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

- *Elle est décroissante sur $]-\infty;0]$ et sur $]-\infty;0]$, $f'(x) = 2x \leqslant 0$.*
- *Elle est croissante sur $[0;+\infty[$ et sur $[0;+\infty[$, $f'(x) = 2x \geqslant 0$.*

<u>Preuve :</u>

- Soit f est une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I. Soit a un réel quelconque de l'intervalle I. Pour tout réel non nul h tel que $a+h \in I$, on a :
  - Si $h > 0$ alors $a+h > a$ et donc $f(a+h) \geqslant f(a)$ puisque f est croissante sur I. Donc, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$ (quotient de deux nombres positifs).
  - Si $h < 0$ alors $a+h < a$ et donc $f(a+h) \leqslant f(a)$ puisque f est croissante sur I. Donc, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$ (quotient de deux nombres négatifs).

  Dans tous les cas, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$. Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ donc $f'(a) \geqslant 0$ (on admettra que la limite en 0 d'une expression positive est positive).
- Le cas où f est décroissante sur I est analogue.
- Si f est constante sur I, son taux d'accroissement est nul et donc, en passant à la limite, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

b) Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle

<u>Théorème (admis) :</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenu dans son ensemble de définition D_f.

- **Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (éventuellement, f' peut s'annuler en un nombre fini de valeurs) alors f est strictement croissante sur I.**
- **Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (éventuellement, f' peut s'annuler en un nombre fini de valeurs) alors f est strictement décroissante sur I.**
- **Si pour tout $x \in I$ $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.**

<u>Remarque :</u> Comme le dit le théorème, même si f est strictement monotone sur I, la fonction f' peut s'annuler sur I : par exemple, la fonction cube f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$, et $f'(0) = 3 \times 0^2 = 0$.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-1$. Étudions ses variations.*
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=2x+2$.
On dresse le tableau de variations en utilisant le signe de la dérivée. Le signe de la dérivée est facile à obtenir ici : c'est une fonction affine, qui s'annule en $x=-1$ et qui est strictement croissante puisque son coefficient directeur est supérieur strictement à 0.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

On a en effet $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-1=-2$.

II – Extrema locaux et dérivée

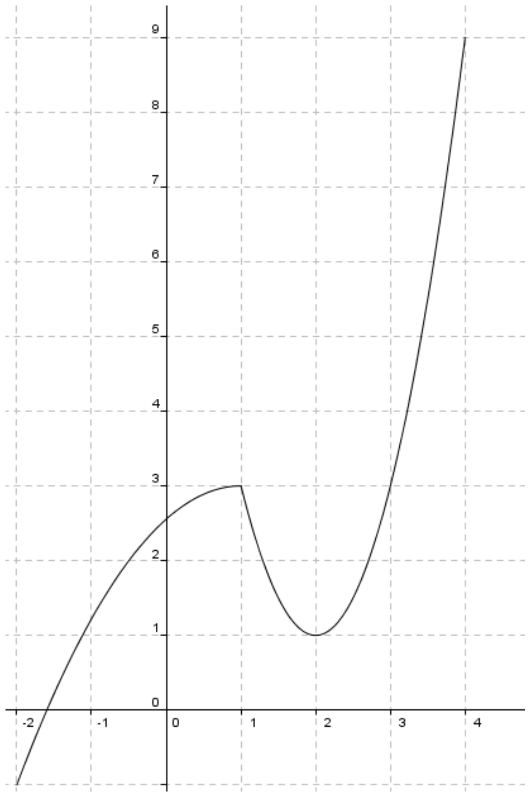
Un extremum désigne un maximum ou un minimum.

Définition : **f est une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.**

- **Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle *ouvert* J inclus dans I contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.**
- **Dire que $f(x_0)$ est un *minimum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle *ouvert* J inclus dans I contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.**

Exemple : *f est définie sur $[-2;4]$.*

- *3 est un maximum local atteint en $x=1$ car par exemple, pour tout $x \in]0;2[$, $f(x) \leqslant f(1)$ et $f(1)=3$.*
- *1 est un minimum local atteint en $x=2$ car par exemple, pour tout $x \in]0;3[$, $f(x) \geqslant f(2)$ et $f(2)=1$.*
- *-1 est le maximum de f atteint en $x=-2$ car pour tout $x \in [-2;4]$, $f(x) \geqslant f(-2)$ et $f(-2)=-1$. Cependant, ce n'est pas un minimum local, car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenant – 2 sur lequel $f(x) \geqslant -1$.*



<u>Théorème :</u> $\boldsymbol{f}$ **est une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert*** $\boldsymbol{I}$ **et** $\boldsymbol{x_0 \in I}$ **. Si** $\boldsymbol{f(x_0)}$ **est un extremum local, alors** $\boldsymbol{f'(x_0)=0}$ **.**

<u>Remarque :</u> La réciproque est fausse ! Par exemple, la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en $x=0$, mais il n'y a pas d'extremum local en $x=0$, puisque cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème :</u> $\boldsymbol{f}$ **est une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert*** $\boldsymbol{I}$ **et** $\boldsymbol{x_0 \in I}$ **. Si** $\boldsymbol{f'}$ **s'annule en** $\boldsymbol{x_0}$ **en changeant de signe, alors** $\boldsymbol{f(x_0)}$ **est un extremum local.**

<u>Exemple :</u> Dans l'exemple du I – b), f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x^2+2x-1$ *admet un maximum local égal à – 2 en* $x=-1$ *.*