Devoir Surveillé n˚2 Correction

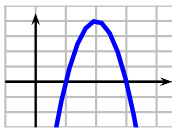
Première ES

Second degré

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 40 points

Exercice 1. QCM — 5 points

1.	Si l'on met l'équation $$5x - 3x^2 = (1-x)^2$$ sous la forme $ax^2 + bx + c$, alors		$\begin{cases} a = 4 \\ b = -7 \\ c = 1 \end{cases}$		
2.	On sait que $\Delta > 0$ et $a < 0$; alors la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour allure				
3.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $x^2 - 4 = 0$ est		$\{-2\ ;\ 2\}$		
4.	Le sommet S de la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 3$	$(-1\ ;\ 2)$			
5.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 3 < 0$	$]-1\ ;\ 3[$			

Exercice 2. Étude complète — 12 points

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x + 2$.

1. [1 point] Déterminer les racines de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 1$; $c = 2$. Le discriminent $\Delta = 9 > 0$ donc elle admet deux racines réelles.

$$\Delta = 9 > 0 \Longrightarrow \boxed{\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 2\}}$$

2. [1 point] En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.

$$\boxed{f(x) = -(x+1)(x-2)}$$

3. [1 point] Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

$\Delta = 9 > 0$ et $a = -1 < 0$, donc le signe de $f(x)$ est donnée par :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. [1 point] Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

L'étude de signe de la question précédente nous donne directement la résolution de l'inéquation :

$$\boxed{f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-1\ ;\ 2[}$$

5. [1 point] Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant apparaitre les racines éventuelles dans le tableau.
La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 1$; $c = 2$. Le coefficient $a = -1 < 0$ étant négatif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées :

$$S\left(\alpha = \frac{-b}{2a}\ ;\ f(\alpha)\right) \quad ; \quad \boxed{S\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)}$$

x	$-\infty$		-1		$\alpha = \frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0	↘	$-\infty$

6. [1 point] Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).

7. [1 point] Résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$
L'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ est une équation du second degré avec : $a = 1$; $b = 2$; $c = -3$. Le discriminent $\Delta = 16 > 0$ donc elle admet deux racines réelles.

$$\Delta = 16 > 0 \Longrightarrow \boxed{\mathscr{S}_2 = \{-3\ ;\ 1\}}$$

8. [3 points] Dresser le tableau de variation de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

puis construire sur le même graphique de l'annexe, $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).
La fonction g est une fonction polynôme du second degré avec : $a = 1$; $b = 2$; $c = -3$. Le coefficient $a = 1 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées :

$$S'\left(\alpha = \frac{-b}{2a}\ ;\ g(\alpha)\right) \quad ; \quad \boxed{S'(-1\ ;\ -4)}$$

x	$-\infty$		-3		$\alpha = -1$		1		$+\infty$
g	$+\infty$	↘	0	↘	4	↗	0	↗	$+\infty$

9. [3 points] Résoudre graphiquement, puis par le calcul l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$.
Les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de $\mathscr{C}_g$ sont les solutions réelles, si elles existent, de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq g(x) &\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \geq x^2 + 2x - 3 \\ &\Leftrightarrow -2x^2 - x + 5 \geq 0 \end{aligned}$$

Or le trinôme du second degré $-2x^2 - x + 5$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$; $b = -1$; $c = 5$.

$$\Delta = 41 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

Le signe du trinôme est alors donnée par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $-2x^2 - x + 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{41}}{4}\ ;\ \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}\right]}$$

Exercice 3. Équation bicarrée et inéquation 5 points

1. **[2,5 points]** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(I_1)\ :\ \frac{-2x^2+4x-5}{-4x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in \left]\frac{3}{4}\ ;\ +\infty\right[}$$

2. **[2,5 points]** En posant $X = x^2$, résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E_2)\ :\ x^4 - 4x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in \mathscr{S} = \left\{-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\right\}}$$

Exercice 4. A la recherche du taux 5 points

Un capital de 15 000 euros est placé à un taux de $t\%$ puis l'année suivante au taux de $(t+2)\%$. Au bout de deux ans, le capital obtenu est de 17 172 euros.

1. **[2 points] Expliquez pourquoi t est solution de l'équation : $1,5(100+t)(102+t) = 17\,172$.**
Au bout des deux ans, le capital augmenté des intérêts vaudra :

$$15\,000 \times (1+t\%) \times (1+(t+2)\%)$$

On a donc l'égalité :

$$\begin{aligned}
15\,000 \times (1+t\%) \times (1+(t+2)\%) = 17\,172 &\Leftrightarrow 15\,000 \times \left(1+\frac{t}{100}\right) \times \left(1+\frac{t+2}{100}\right) = 17\,172 \\
&\Leftrightarrow 15\,000 \times \left(\frac{100+t}{100}\right) \times \left(\frac{102+t}{100}\right) = 17\,172 \\
&\Leftrightarrow \frac{15\,000}{10\,000} \times (100+t) \times (102+t) = 17\,172 \\
&\Leftrightarrow \boxed{1,5(100+t)(102+t) = 17\,172}
\end{aligned}$$

2. **[3 points] Calculer le taux t, arrondi au centième.**

$$1,5(100+t)(102+t) = 17\,172 \Leftrightarrow 1,5t^2 + 303t - 1\,872 = 0$$

L'équation est du second degré de la forme $at^2+bt+c=0$ avec : $a = 1,5\ ;\ b = 303\ ;\ c = -1\,872$.
Le discriminent $\Delta = 103\,041 > 0$ donc elle admet deux racines réelles.

$$\Delta = 103\,041 > 0 \Longrightarrow \boxed{\mathscr{S}_3 = \{-208\ ;\ 6\}}$$

Le taux étant positif, la seule solution retenue est

$$\boxed{t = 6}$$

Exercice 5. Optimisation de bénéfice 13 points

Le coût total de production, en euros, est donné avec $x \in [0\ ;\ 60]$ par $f(x) = x^2 - 20x + 200$.

1. **[2 points] Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $f(0)$ et $f(60)$.**
La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec : $a = 1\ ;\ b = -20\ ;\ c = 200$. Le coefficient $a = 1 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées :

$$S\left(\alpha = \frac{-b}{2a}\ ;\ f(\alpha)\right) \quad ; \quad \boxed{S\,(10\ ;\ 100)}$$

x	0		$\alpha = 10$		60
f	$f(0) = 200$	↘	100	↗	$f(60) = 2\,600$

2. **[0,5 point]** Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 euros. La recette est $\boxed{R(x) = 34x}$.

3. **[1 point]** Le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x objets est donné, pour $x \in [0\ ;\ 60]$, en faisant la différence des recettes et des coûts soit :

$$\boxed{g(x) = 34x - \left(x^2 - 20x + 200\right) = -x^2 + 54x - 200}$$

4. **[2 points] Variations de g sur $x \in [0\ ;\ 60]$ et tableau de variation en faisant figurer $g(0)$ et $g(60)$.**
La fonction g est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1\ ;\ b = 54\ ;\ c = -200$. Le coefficient $a = -1 < 0$ étant négatif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées :

$$S'\left(\alpha = \frac{-b}{2a}\ ;\ g(\alpha)\right) \quad ; \quad \boxed{S'\,(27\ ;\ 529)}$$

x	0		4		$\alpha = 27$		50		60
g	$g(0) = -200$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	529	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(60) = -560$

5. **[1 point] En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?**
Le bénéfice maximal est donc de **529 euros**, obtenu pour une production de **27 objets**.

6. **[2 points] Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 0$.**

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 54x - 200 \geq 0$$

Or le trinôme du second degré $-x^2 + 54x - 200$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1\ ;\ b = 54\ ;\ c = -200$.

$$\Delta = 2\,116 > 0 \Rightarrow x_1 = 4 \text{ et } x_2 = 50$$

Le signe du trinôme est alors donnée par :

x	0		4		50		60
signe de $-x^2 + 54x - 200$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [4\ ;\ 50]}$$

Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.
L'entreprise doit donc vendre entre **4 et 50 objets** pour que la production soit rentable.

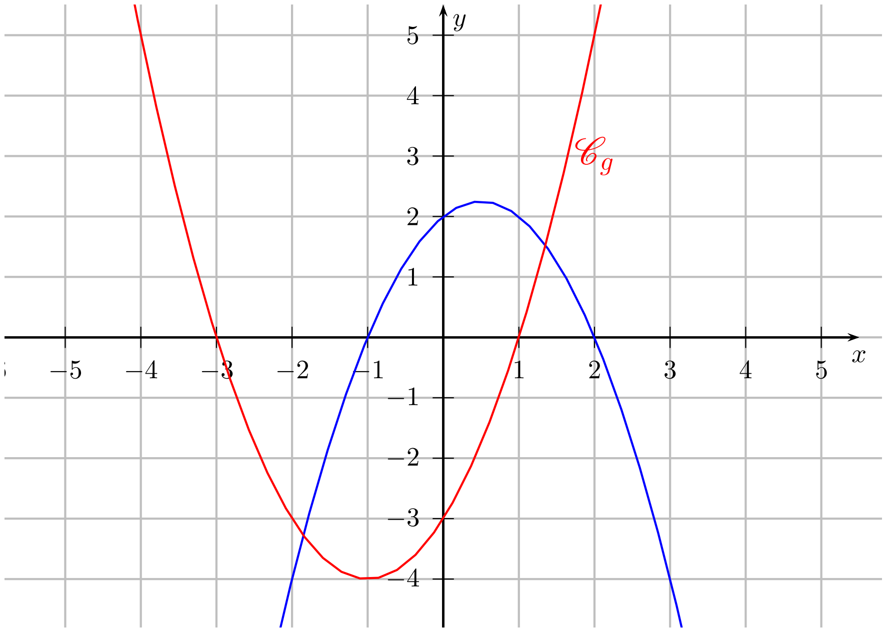
7. **[1,5 points] Sur le deuxième graphique de l'annexe, on a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f. Construire $\mathscr{C}_R$, la courbe représentative de la fonction recette R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.**

8. **[1 point] Retrouver graphiquement le bénéfice maximal. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.**
Ce bénéfice maximal correspond à l'écart maximal entre la droite et la courbe des coûts $\mathscr{C}_f$ entre 4 et 50.

9. **[2 points] Construire $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g.**

Annexe à rendre avec votre copie

Graphique de l'exercice 2



Graphique de l'exercice 5