Devoir Surveillé n°6 Correction

Première ES/L
Dérivation et suites
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1. Validation des compétences — 5 points

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.

1. a. Déterminer u_1 et u_2.
(u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$ donc pour tout entier n on a : $u_{n+1} = u_n - 2$ soit :

$$u_1 = u_0 - 2 = 3 \quad \text{et} \quad u_2 = u - 1 - 2 = 1$$

1. b. Donner le terme général de la suite (c'est à dire exprimer u_n en fonction de n).
Pour tout entier n on a : $u_n = u_0 + nr$ soit ici :

$$u_n = \underline{5 - 2n}$$

1. c. Calculer u_{25}. On a alors : $u_{25} = 5 - 2 \times 25 = \underline{-45}$.

2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $r = 1,5$.

2. a. Déterminer v_1 et v_2.
(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $r = 1,5$ donc :

$$v_1 = v_0 \times 1,5 = 3 \quad \text{et} \quad v_2 = v_1 \times 1,5 = 4,5$$

2. b. Donner le terme général de la suite (c'est à dire exprimer v_n en fonction de n).
Pour tout entier n on a : $v_n = v_0 \times q^n$ soit ici :

$$v_n = \underline{2 \times 1,5^n}$$

2. c. Calculer v_{25}. On a alors : $v_{25} = 2 \times 1,5^{25} \approx \underline{50\ 502}$.

Exercice 2. Retour sur la dérivation — 5 points

On considère la fonction k définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $k(x) = \dfrac{1-4x^2}{2-3x^2}$

1. Montrer que la fonction dérivée de k sur $[1\,;+\infty[$ est :

$$\boxed{k'(x) = \frac{-10x}{\left(2-3x^2\right)^2}}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 1.
On a : $T_1\ :\ y = k'(1)(x+1) + k(1)$ soit :

$$\left\{\begin{array}{ll} k(1) & = 3 \\ k'(1) & = -10 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T_1\ :\ y = -10(x-1)+3 \ \text{ soit } \boxed{T_0\ :\ y = -10x + 13}$$

3. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}_k$ qui admet une tangente horizontale.
Les abscisses des points de $\mathscr{C}_k$ qui admettent une tangente horizontale sont les éventuelles solutions de l'équation $k'(x) = 0$ soit :

$$k'(x) = 0 \iff \frac{-10x}{\left(2-3x^2\right)^2} = 0 \iff -10x = 0 \iff x = 0 \notin [1\,;+\infty[$$

Il n'y a donc pas de point de la courbe qui admette une tangente horizontale.

<u>Remarque</u>.
Si on se place sur l'intervalle $[-0,1\ ;\ 0,1]$ par exemple sur lequel la fonction est aussi définie et dérivable, l'unique point est donc celui d'abscisse 0 et d'ordonnée $k(0) = \dfrac{1}{2}$ soit :

$$\boxed{A\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)}$$

Exercice 3. Un placement — 10 points

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 2000 \\ a_{n+1} & = 1{,}02 \times a_n + 300 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = a_n + 15000 \end{cases}$$

Partie A : Étude générale

1. Déterminer les trois premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

$$\begin{cases} a_0 = 2000 \\ a_1 = 2340 \\ a_2 = 2686.8 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 17000 \\ b_1 = 17340 \\ b_2 = 17686.8 \end{cases}$$

2. La suite (a_n) est-elle géométrique ? est-elle arithmétique ?

- (a_n) est-elle géométrique ?

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_0} = 1,17 \\ \dfrac{a_2}{a_1} \approx 1.148 \neq \dfrac{a_1}{a_0} \end{cases} \quad \text{donc la suite n'est pas géométrique.}$$

- (a_n) est-elle arithmétique ?

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = 340 \\ a_2 - a_1 = 346.8 \neq a_1 - a_0 \end{cases} \quad \text{donc la suite n'est pas arithmétique.}$$

3. Montrer que la suite (b_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

Pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + 15000 \\ b_{n+1} &= (1{,}02\ a_n + 300) + 15000 \\ b_{n+1} &= 1{,}02 \times a_n + 15300 \\ b_{n+1} &= 1{,}02 \times \left(a_n + \frac{15300}{1{,}02}\right) \\ b_{n+1} &= 1{,}02 \times (a_n + 15000) \\ b_{n+1} &= 1{,}02 \times b_n \end{aligned}$$

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$, et de premier terme $b_0 = 17000$ puisque :

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + 15000 \\ b_0 &= 2000 + 15000 \\ b_0 &= 17000 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(b_n) : \begin{cases} b_0 & = 17000 \\ b_{n+1} & = 1{,}02 \times b_n \end{cases} \ ; \ \forall n \geq 0}$$

4. En déduire le terme général de la suite (b_n).

La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 1{,}02$, et de premier terme $b_0 = 17000$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_n = b_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_n = 17000 \times (1{,}02)^n}$$

5. Démontrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_n = 17000 \times (1{,}02)^n - 15000$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$b_n = a_n + 15000$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = b_n - 15000$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_n = 17000 \times (1{,}02)^n - 15000}$$

Partie B : Une application

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Le couple a placé le montant de 2 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2017 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 300 euros. On note a_n le capital présent sur le compte le 1er janvier $2017 + n$ après le versement annuel. On a donc $a_0 = 2000$.

1. Justifier rapidement que la suite (a_n) de la partie A modélise bien le problème.

Augmenter de 2%, c'est multiplier par 1,02 donc chaque capital au 1er janvier s'obtient en multipliant celui de l'année précédente par 1,02 et ajouter 300. On a bien pour tout entier n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1{,}02 \times a_n + 300 \\ a_0 = 300 \end{cases}$$

2. On suppose que la suite (a_n) est strictement croissante. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels avec la calculatrice l'inégalité : $a_n > 5\,000$

n	a_n
8	4 918.209477
9	5 316.573667

La suite étant supposée croissante on a :

$$a_n > 5\,000 \iff \underline{n \geq 9}$$

3. Interpréter le résultat de la question précédente dans le cadre de l'exercice.

Le capital du couple dépassera les 5 000 euros en $(2017 + 9)$ soit en 2026.

4. Compléter les lignes incomplètes de cet algorithme afin qu'il permette de répondre à la question (2.).

Pseudo Code

```
Fonction recherche()
    a ← 2000
    n ← 0
    Tant que a ≤ 5000  Faire
        n ← n + 1
        a ← 1,02 × u + 300
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

Fin du devoir