Devoir Surveillé n°4 Correction

Première ES

Bilan

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 21 points

Exercice 1. QCM — 3 points

Question 1 (Réponse c)

Le prix d'un produit est passé de 200 € à 100 €.
Cette évolution correspond à deux baisses successives et identiques d'environ :

a. 50 % **b.** 25 % **c.** $\boxed{29\,\%}$ **d.** 71 %

Preuve

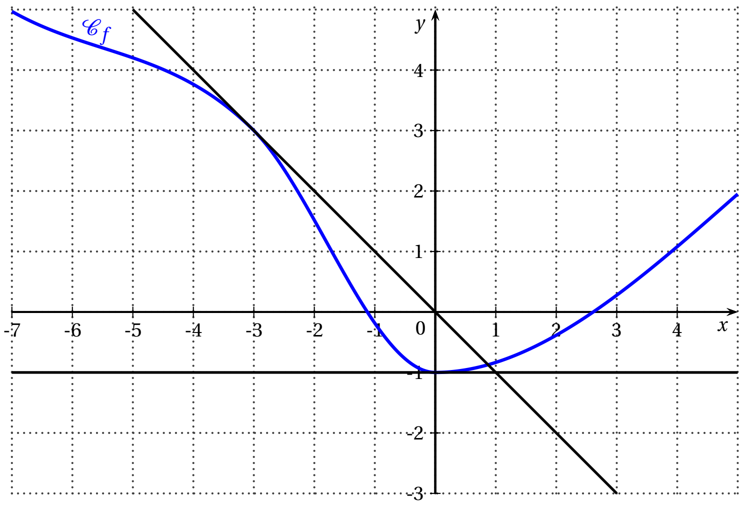
Le prix a baissé de 50% donc le coefficient multiplicateur associé est $k = 0,5$. On cherche alors le coefficient k' qui correspond à deux baisses successives et identiques, soit puisque k est positif :

$$k'^2 = k = 0,5 \Longrightarrow k' = \sqrt{0,5} \Longrightarrow t\% = k - 1 \approx -29\%$$

La réponse correcte à la question 1 est donc la réponse c.

Question 2 (Réponse c)

La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $\boxed{f'(-3) = -1}$ **d.** $f'(-3) = 3$

Preuve.

- Au point d'abscisse 0, la tangente est horizontale donc $f'(0) = 0$ ce qui exclu la réponse a.
- Au point d'abscisse -1, la tangente n'est pas horizontale donc $f'(-1) \neq 0$ ce qui exclu la réponse b.
- Au point d'abscisse -3, la tangente est de pente négative donc $f'(-3) < 0$ ce qui exclu la réponse d.
- La seule réponse possible à la question 1 est la réponse c.

Question 3 (réponse d)

Si le prix du baril de pétrole augmente une première fois de 50% puis une seconde fois à nouveau de 50%, alors le prix du baril :

a. a doublé **b.** a augmenté de 100% **c.** a augmenté de 225% **d.** $\boxed{\text{a augmenté de 125\%}}$

Preuve

Si le prix du baril de pétrole augmente une première fois de 50% puis une seconde fois à nouveau de 50%, alors le coefficient multiplicateur associé est :

$$k = 1,5 \times 1,5 = 2,25 = 1 + 1,25 = 1 + 125\%$$

Le prix a donc augmenté de 125%, la réponse correcte à la question 4 est donc la réponse d.

Exercice 2. D'après Amérique du sud nov 2013 3 points

1. La direction de l'entreprise décide de diminuer le budget consacré aux frais de déplacements de ses commerciaux.

Affirmation 1

« Diminuer ce budget de 6 % par an pendant 5 ans revient à diminuer ce budget de 30 % sur la période de 5 ans ».

Preuve.

Diminuer le budget de 6 % sur un an revient à multiplier par

$$k = 1 - \frac{6}{100} = 0,94$$

Diminuer le budget de 6 % pendant cinq ans revient à multiplier par

$$k^5 = \left(1 - \frac{6}{100}\right)^5 = 0,94^5 \approx 0,7339$$

Ce coefficient multiplicateur correspond à une évolution de :

$$t\% = k^5 - 1 = 1 - 0,7339 = 26,61\,\%$$

et pas de 30 % sur la période de 5 ans.

L'affirmation 1 est fausse.

2. La production mensuelle varie entre 0 et 10 000 clés. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $B(x) = -x^2 + 10x - 9$, où x représente le nombre de milliers de clés produites et vendues.

Affirmation 2

« Lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB, le bénéfice est positif ».

Preuve.

L'expression $\left(-1x^2 + 10x - 9\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 10 \\ c = -9 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 64 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-1x^2 + 10x - 9\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{64}}{-2} = 9 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 + \sqrt{64}}{-2} = 1$$

La fonction B est donc du signe de $a=-1<0$ donc négative à l'extérieur des racines et positive entre 1 et 9. Lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 millier soit 1 000 et 9 milliers soit 9 000 clés USB, le bénéfice est donc positif. L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3

« Lorsque l'entreprise produit et vend 5 000 clés USB, le bénéfice mensuel est maximal ».

Preuve.

L'expression $\left(-1x^2+\ 10x-\ 9\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-1\\ b=10\\ c=-9\end{array}\right| \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\Delta & =(10)^2-4\times(-1)\times(-9)=64>0\\ \alpha & =\dfrac{-10}{2\times(-1)}=5\end{array}\right.$$

Puisque $a=-1<0$ est négatif, la courbe représentative de B est une parabole tournée vers le bas. La fonction admet donc un maximum en $\alpha=5$ et ce maximum est $B(5)=16$. Lorsque l'entreprise produit et vend 5 milliers soit 5 000 clés USB, le bénéfice mensuel est maximal et atteint 16 milliers d'euros.

Exercice 3. Statistiques ... à la calculatrice ! 3.5 points

1. Déterminer la moyenne, la médiane, et les quartiles Q_1 et Q_3 de la série en expliquant la méthode utilisée.

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	120	80	122	88	120	70	600
ECC	120	200	322	410	530	600	X
Rangs	$1^e \longrightarrow 120^e$	$121^e \longrightarrow 200^e$	$201^e \longrightarrow 322^e$	$323^e \longrightarrow 410^e$	$410^e \longrightarrow 530^e$	$531^e \longrightarrow 600^e$	X

- La moyenne est :

$$\boxed{m=\frac{120\times1+80\times2+\cdots+70\times6}{600}=\frac{2\,018}{600}\approx3{,}36}$$

- Il y a 600 valeurs, donc on prendra comme médiane une valeur comprise entre les 300° et 301° valeur.
  La 300° valeur est 3 et la 301° aussi donc la médiane est $\boxed{M_e=3}$.
- Il y a 600 valeurs et $0{,}25\times600=150$.
  Le premier quartile sera donc la 150° valeur soit $\boxed{Q_1=2}$.
- Il y a 600 valeurs et $0{,}75\times500=450$.
  Le troisième quartile sera donc la 450° valeur soit $\boxed{Q_3=5}$.

2. Déterminer à l'aide de la calculatrice et sans détailler les calculs l'écart-type σ de cette série statistique.

$$\boxed{\sigma\approx1.67}$$

3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante :

Affirmation 4

Au moins 65% des valeurs de cette série statistique appartiennent à l'intervalle $\left[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma\right]$.

- On a :

$$\left[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma\right]\approx[1{,}69\,;5{,}04]$$

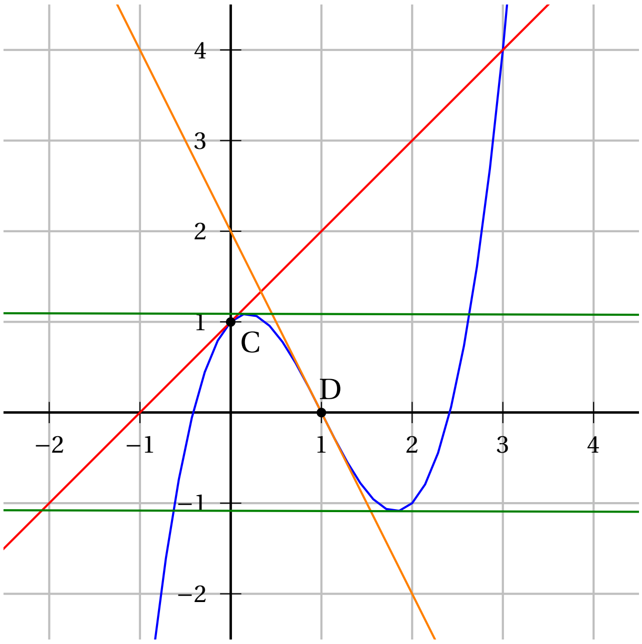
- Il y a alors 410 valeurs sur les 600 comprises entre 2 et 5 et donc la fréquence cherchée est :

$$f=\frac{410}{600}\approx68{,}33\%$$

L'affirmation est donc vraie.

Exercice 4. Lecture graphique puis calculs — 5.5 points

On a tracé $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point C d'abscisse 0 .



1. **Lire le nombre dérivé $g'(0)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au points C d'abscisse 0.**

$$\boxed{g'(0) = 1 \text{ et } (T_1) \ : \ y = x + 1}$$

2. **La fonction g est en fait définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Calculer la dérivée de g.**
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et pour tout réel x on a : $\underline{g'(x) = 3x^2 - 6x + 1}$.

3. **bo Retrouver le résultat de la première question par le calcul.**

$$\left\{\begin{array}{l} g(0) = 1 \\ g'(0) = 1 \end{array}\right| \Longrightarrow y = g'(0)(x-0) + g(0) \Longrightarrow \underline{y = x + 1}$$

4. **Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point D d'abscisse 1** .

$$\left\{\begin{array}{l} g(1) = 0 \\ g'(1) = -2 \end{array}\right| \Longrightarrow y = g'(1)(x-1) + g(1) \Longrightarrow \underline{y = -2x + 2}$$

5. **Construire cette tangente sur le graphique**.

6. **Le graphe de la fonction g semble présenter deux tangentes horizontales. Les tracer sur le graphique.**

7. **Résoudre l'équation : $3x^2 - 6x + 1 = 0$.**
L'expression $\left(3x^2 - 6x + 1\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 24 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(3x^2 - 6x + 1\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{24}}{6} \approx 0.184 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{24}}{6} \approx 1.816$$

8. **Que représentent les solutions de cette équation dans le cadre de cet exercice ?**
On remarque que :

$$3x^2 - 6x + 1 = 0 \Longleftrightarrow g'(x) = 0$$

De ce fait les solutions de cette équation sont les abscisses des points de la courbes qui admettent une tangente de coefficient directeur nul, donc horizontale.

Exercice 5. Un problème ... du second degré 6 points

Une entreprise produit et vend des meubles. Sa capacité de production varie de 300 à 1 200 par mois.

- On note x le nombre de centaines de meubles fabriqués chaque mois, x étant compris entre 3 et 12.
- Le coût total de production de ces x centaines de meubles, exprimé en dizaine de milliers d'euros, est modélisé par la fonction : $C(x) = 0,25x^2 + x + 20,25$.

Partie A

1. [1.5 point] Étudier rapidement les variations de C et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $[3;12]$.

La fonction $x \longmapsto 0,25x^2 + x + 20,25$ est une fonction polynôme du second degré avec :

$$\begin{cases} a = 0.25 \\ b = 1 \\ c = 20.25 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = C(\alpha) = \dfrac{77}{4} = 19.25 \end{cases}$$

Le coefficient $a = 0.25 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées : $S\left(-2\,;\,\dfrac{77}{4}\right)$. Sur l'intervalle $[3;\,12]$, la fonction coût est donc strictement croissante, on obtient donc :

x	3		12
Variations de C	25.5	$\nearrow$	68.25

Tous les meubles fabriqués sont vendus et l'entreprise doit fixer le prix de son produit.
On note $R(x)$ la recette, en dizaine de milliers d'euros, occasionnée par la vente de x centaines de meubles.

Partie B : une proposition

On décide de proposer un prix fixe de 630 euros par meuble.

2. [1 point] Calculer $R(10)$ et interpréter le résultat (attention aux unités).

Pour la vente de 10 centaines de meubles, soit 1 000 meubles, la recette est de 630€ × 1 000 = 630 000€.
La recette est exprimée en dizaines de milliers d'euros donc :

$$\boxed{R(10) = \frac{630\,000}{10\,000} = 63 \text{ dizaines de milliers d'euros}}$$

3. [1 point] Donner l'expression de $R(x)$ en fonction de x.

Pour x centaines de meubles vendus, la recette est de :

$$630€ \times 100 \times x$$

Et donc en dizaines de milliers d'euros on obtient :

$$\boxed{R(x) = (630€ \times 100 \times x) \div 10\,000 = 6,3x}$$

4. Montrer que le bénéfice, en dizaine de milliers d'euros, occasionné par la vente de x centaines de meubles, est alors de : $B(x) = -0.25x^2 + 5,3x - 20.25$.

On a donc pour le bénéfice :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 6,3x - (0,25x^2 + x + 20,25) = \underline{-0.25x^2 + 5,3x - 20.25}$$

5. Déterminer dans quel intervalle la production est viable pour l'entreprise.

B est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & -0.25 \\ b = & 5.3 \\ c = & -20.25 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 7.84 > 0 \implies \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 16.2 \end{cases}$$

Donc $B(x)$ est négatif (signe de $a = -0.25$) à l'extérieur des racines et positif entre.

x	3		5		12
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	

L'entreprise fera donc un bénéfice positif pour une production comprise entre 500 et 1 200 meubles.

6. Dresser le tableau de variation de la fonction bénéfice sur l'intervalle $[3;12]$. Donner la production qui donne un bénéfice maximal ainsi que ce bénéfice.

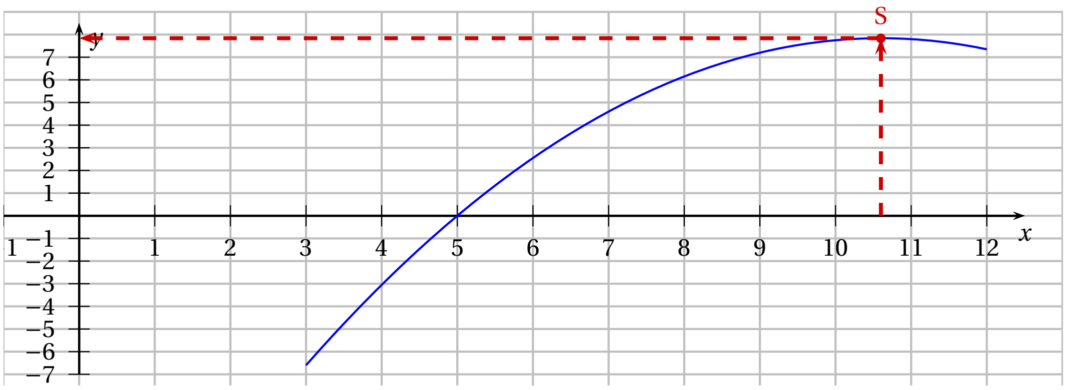
La fonction $x \longmapsto -0.25x^2 + 5,3x - 20.25$ est une fonction polynôme du second degré avec :

$$\begin{cases} a = -0.25 \\ b = 5,3 \\ c = -20.25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 10,6 \\ \beta = B(\alpha) = 7,84 \end{cases}$$

Le coefficient $a = -0.25 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées : $S(10,6\ ;\ 7,84)$. Sur l'intervalle $[3;12]$, on obtient donc :

x	3	5	10.6	12
Variations de B	-6.6 ↗	0 ↗	7.84 ↘	7.35

Le bénéfice maximal est donc de 7,84 dizaines de milliers d'euros soit de 78 400€, il est atteint pour une production de 10,6 centaines soit 1 060 meubles.



Partie C : Coût marginal

Définition 1 (Coût Marginal (Marginal Cost))

En économie, le coût marginal pour une quantité q produite, est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire, soit le coût de la $(q+1)^e$ unité : $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.

7. Déterminer la dérivée C', de la fonction coût. cela nous donne une approximation du coût marginal.

La fonction C définie sur $[3;12]$ par $C(x) = 0,25x^2 + x + 20,25$ est dérivable sur $[3;12]$ comme fonction polynôme. Pour tout réel x de $[3;12]$ on a : $C'(x) = 0,5x + 1$.

8. Calculer le coût marginal pour une production de 1 060 meubles, d'une part en utilisant l'approximation de la question (7.), d'autre part en utilisant la formule de la définition.

- D'une part en utilisant la formule $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ on a : $C_m(10.6) = C(10.6+1) - C(10.6) = 6.55$
- D'autre part en utilisant l'approximation par la dérivée on a : $C_m(10.6) \approx C'(10.6) = 6.3$

Fin du devoir