Devoir Surveillé n°3 Correction

Première ES/L

Statistiques et second degré

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 22.5 points

Exercice 1. Statistiques ... à la main ! 3 points

Dans tout l'exercice, les résultats seront si nécessaire arrondis au centième.

On donne la répartition des salaire des 400 employés d'une entreprise (en milliers d'euros). Compléter le tableau ci-dessous et calculer la moyenne des salaires ainsi que la variance et l'écart-type et explicitant clairement la formule utilisée.

Salaire (en milliers d'euros)	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	Total
Centre des classes x_i	1.5	2.5	3.5	X
Effectifs n_i	150	200	50	400
$n_i \times x_i^2$	337.5	1250	612.5	2 200

- La moyenne :

$$\overline{x} = \frac{900}{400} = \underline{2,25}$$

- Variance :

$$V = \frac{337.5 + 1205 + 612.5}{400} - (\overline{x})^2 = \frac{2200}{400} - 2,25^2 = \underline{0,4375}$$

- Écart-type :

$$\sigma = \sqrt{V} \approx \underline{0,66}$$

Exercice 2. Statistiques ... à la calculatrice ! 6 points

Dans tout l'exercice, les résultats seront si nécessaire arrondis au centième.

1. **Déterminer la moyenne, la médiane, et les quartiles Q_1 et Q_3 de la série en expliquant la méthode utilisée.**

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	120	80	122	88	120	70	600
ECC	120	200	322	410	530	600	X
Rangs	$1^e \longrightarrow 120^e$	$121^e \longrightarrow 200^e$	$201^e \longrightarrow 322^e$	$323^e \longrightarrow 410^e$	$410^e \longrightarrow 530^e$	$531^e \longrightarrow 600^e$	X

- La moyenne est :

$$\boxed{m = \frac{120 \times 1 + 80 \times 2 + \cdots + 70 \times 6}{600} = \frac{2\,018}{600} \approx 3,36}$$

- Il y a 600 valeurs, donc on prendra comme médiane une valeur comprise entre les 300° et 301° valeur. La 300° valeur est 3 et la 301° aussi donc la médiane est 3.
- Il y a 600 valeurs et $0,25 \times 600 = 150$. Le premier quartile sera donc la 150° valeur soit $\boxed{Q_1 = 2}$.
- Il y a 600 valeurs et $0,75 \times 500 = 450$. Le troisième quartile sera donc la 450° valeur soit $\boxed{Q_3 = 5}$.

2. **Déterminer à l'aide de la calculatrice et sans détailler les calculs l'écart-type σ de cette série statistique.**

$$\boxed{\sigma \approx 1.67}$$

3. **Que pensez-vous de l'affirmation suivante :**

Affirmation 1

Au moins 65% des valeurs de cette série statistique appartiennent à l'intervalle $\left[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma\right]$.

- On a :
$$\left[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma\right]\approx[1,69\,;5,04]$$
- Il y a alors 410 valeurs sur les 600 comprises entre 2 et 5 et donc la fréquence cherchée est :
$$f=\frac{410}{600}\approx 68,33\%$$
L'affirmation est donc vraie.

Exercice 3. Une inéquation — 4 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_1) : $\dfrac{6x^2-5x+1}{3-4x}\leq 0$.

- **Valeurs interdites**. Il faut que le dénominateur soit non nul donc que :
$$-4x+3\neq 0 \Longleftrightarrow x\neq\frac{3}{4}$$
- **Étude de signe du dénominateur**.
On a directement :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
signe de $-4x+3$		+	0	−	

- **Étude de signe du numérateur**. Le numérateur est une fonction polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+c avec :
$$\begin{cases} a= & 6\\ b= & -5\\ c= & 1\end{cases}\Rightarrow \Delta=1>0$$
Les deux racines sont donc :
$$x_1=\frac{5-\sqrt{1}}{12}=\frac{1}{3}\quad\text{et}\quad x_2=\frac{5+\sqrt{1}}{12}=\frac{1}{2}$$
Donc $6x^2-5x+1$ est positif (signe de $a=6$) à l'extérieur des racines et négatif sur $[x_1\ ;\ x_2]$.
- **Bilan**.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
signe de $-4x+3$		+		+		+	‖	−	
signe de $6x^2-5x+1$		+	0	−	0	+	‖	+	
signe de $\dfrac{6x^2-5x+1}{-4x+3}$		+	0	−	0	+	‖	−	

Donc les solutions de l'inéquation (I_1) : $\dfrac{6x^2-5x+1}{-4x+3}\leq 0$ sont :
$$\boxed{\mathscr{S}=\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]\cup\left]\frac{3}{4};\infty\right[}$$

Exercice 4. Un problème ... du second degré 9.5 points

Une entreprise produit et vend des meubles. On note x le nombre de centaines de meubles fabriqués chaque mois, x étant compris entre 3 et 12.
Le coût total de production de ces x centaines de meubles, exprimé en dizaines de milliers d'euros, est modélisé par : $C(x) = 0,25x^2 + x + 20,25$.

Partie A

1. **[1.5 point] Étudier rapidement les variations de C et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $[3; 12]$.**
La fonction $x \longmapsto 0,25x^2 + x + 20,25$ est une fonction polynôme du second degré avec :

$$\begin{cases} a = 0.25 \\ b = 1 \\ c = 20.25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = C(\alpha) = \dfrac{77}{4} = 19.25 \end{cases}$$

Le coefficient $a = 0.25 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées : $S\left(-2\,;\,\dfrac{77}{4}\right)$. Sur l'intervalle $[3;\,12]$, la fonction coût est donc strictement croissante, on obtient donc :

x	3	12
Variations de C	25.5	68.25

Tous les meubles fabriqués sont vendus et l'entreprise doit fixer le prix de son produit.
On note $R(x)$ la recette, en dizaines de milliers d'euros, occasionnée par la vente de x centaines de meubles.

Partie B : la première proposition

La première proposition est un prix fixe de 550 euros par meuble.

2. **[1 point] Calculer $R(10)$ et interpréter le résultat (attention aux unités).**
Pour la vente de 10 centaines de meubles, soit 1 000 meubles, la recette est de 550€ × 1 000 = 550 000€.
La recette est exprimée en dizaines de milliers d'euros donc :

$$\boxed{R(10) = \frac{550\,000}{10\,000} = 55 \text{ dizaines de milliers d'euros}}$$

3. **[1 point] Donner l'expression de $R(x)$ en fonction de x.**
Pour x centaines de meubles vendus, la recette est de :

$$550€ \times 100 \times x$$

Et donc en dizaines de milliers d'euros on obtient :

$$\boxed{R(x) = (550€ \times 100 \times x) \div 10\,000 = 5,5x}$$

4. **[1 point] Mq le bénéfice, <u>en dizaines de milliers d'euros</u>, occasionné par la vente de x centaines de meubles, est : $B(x) = -0.25x^2 + 4,5x - 20.25$.**

$$B(x) = R(x) - C(x) = 5,5x - (0,25x^2 + x + 20,25) = \underline{-0.25x^2 + 4,5x - 20.25}$$

5. **[2 points] Expliquez pourquoi ce prix de vente ne peut pas convenir sur le plan commercial.**
B est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & -0.25 \\ b = & 4.5 \\ c = & -20.25 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 0 \Longrightarrow x_1 = 9$$

Donc $B(x)$ est négatif (signe de $a = -0.25$) partout et nul en $x = 9$. L'entreprise fera donc toujours des pertes, le bénéfice sera juste nul pour une production de 9 centaines de meubles.

Partie C : la deuxième proposition

La seconde proposition est un prix fixe de 630 euros par table.

6. [1 point] Mq le bénéfice, <u>en dizaines de milliers d'euros</u>, occasionné par la vente de x centaines de meubles, est alors de : $B(x) = -0.25x^2 + 5,3x - 20.25$.

Pour x centaines de meubles vendus, la recette est de :

$$630€ \times 100 \times x$$

Et donc en dizaines de milliers d'euros on obtient un recette de :

$$R(x) = (630€ \times 100 \times x) \div 10\,000 = \underline{6,3x}$$

On a donc pour le bénéfice :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 6,3x - (0,25x^2 + x + 20,25) = \underline{-0.25x^2 + 5,3x - 20.25}$$

7. [2 points] Expliquez pour quelle production cette proposition est viable pour l'entreprise.

B est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & -0.25 \\ b = & 5.3 \\ c = & -20.25 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 7.84 > 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 16.2 \end{cases}$$

Donc $B(x)$ est négatif (signe de $a = -0.25$) à l'extérieur des racines et positif entre. L'entreprise fera donc un bénéfice positif pour une production comprise entre 500 et 1 200 meubles.

Fin du devoir

Bonus [2 points]

Dresser le tableau de variation de la fonction bénéfice de la partie C de l'exercice 4 puis tracer la courbe représentative de B sur l'intervalle $[3; 12]$. Donner la production qui donne un bénéfice maximal ainsi que ce bénéfice.

La fonction $x \longmapsto -0.25x^2 + 5,3x - 20.25$ est une fonction polynôme du second degré avec :

$$\begin{cases} a = -0.25 \\ b = 5,3 \\ c = -20.25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 10,6 \\ \beta = B(\alpha) = 7,84 \end{cases}$$

Le coefficient $a = -0.25 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées : $S\,(10,6\ ;\ 7,84)$. Sur l'intervalle $[3; 12]$, on obtient donc :

x	3	5	10.6	12
Variations de B	-6.6 ↗	0 ↗	7.84 ↘	7.35

Le bénéfice maximal est donc de 7,84 dizaines de milliers d'euros soit de <u>78 400€</u>, il est atteint pour une production de 10,6 centaines soit <u>1 060 meubles</u>.