Interrogation n°5 Correction

Première ES

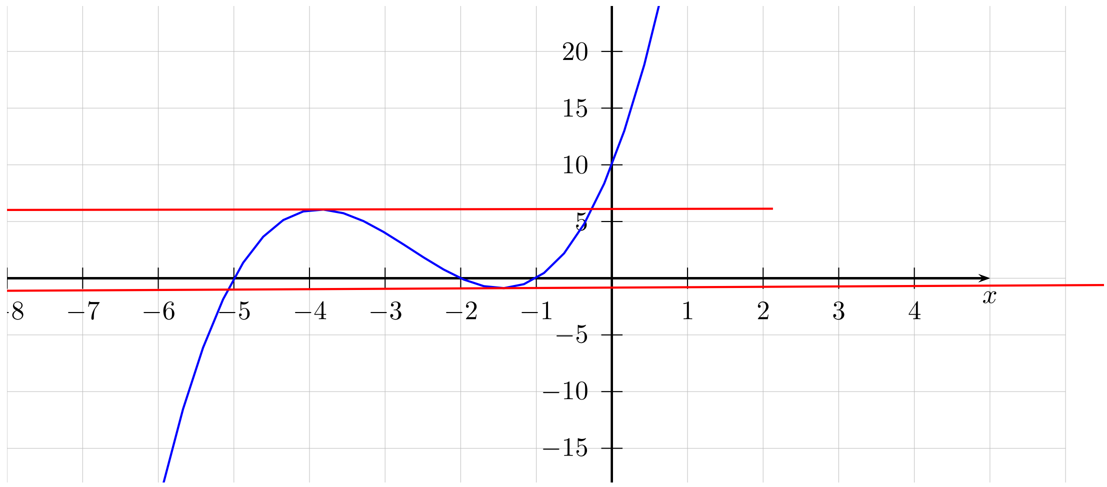
Dérivation

Durée 0.5 heure - Coeff. 2

Noté sur 20 points

Exercice 1. Dérivée et tangente — 8 points

On a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10 \end{cases}$



1. Déterminer la dérivée de f : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 16x + 17$

2. Déterminer l'équation de T, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -3 et la construire sur le graphique ci-dessus.
L'équation de T est : $T \ : \ y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(-3) & = 4 \\ f'(-3) & = -4 \end{array} \right| \Rightarrow T \ : \ y = -4(x+3) + 4$$

soit

$$\boxed{(T) \ : \ y = -4x - 8}$$

3. Les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ ayant une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 + 16x + 17 = 0$$

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & = 3 \\ b & = 16 \\ c & = 17 \end{array} \right| \Rightarrow \Delta = 52 > 0$$

Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles qui sont les abscisses les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente de horizontale donc de coefficient directeur 0 soit :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{-16 - \sqrt{52}}{6} \ ; \ \frac{-16 + \sqrt{52}}{6} \right\} = \left\{ \frac{-8 - \sqrt{13}}{3} \ ; \ \frac{-8 + \sqrt{13}}{3} \right\} \simeq \{-3,87 \ ; \ -1,46\}}$$

Exercice 2. Dérivée et tangente 12 points

Pour les fonctions suivantes définies sur I, déterminer la fonction dérivée et l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

1. Avec g la fonction définie sur $I=\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

La fonction g est définie et dérivable sur I. On peut remarquer, mais ce n'était pas demandé, que le numérateur n'est jamais nul car pour tout réel x, le carré x^2 est positif et donc $x^2+1\geq 1$.

La fonction g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ et donc de fonction dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec

$u(x)=x+1$	$u'(x)=1$
$v(x)=x^2+1$	$v'(x)=2x$

Pour tout réel x de $I=\mathbb{R}$ on a donc

$$\boxed{g'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-(x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}}$$

L'équation de T_1 la tangente au point d'abscisse 1 est $y=g'(1)(x-1)+g(1)$

$$\left\{\begin{array}{ll} g(1) & =1 \\ g'(1) & =-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T\ :\ y=-\frac{1}{2}(x-1)+1 \text{ soit } \boxed{(T_1)\quad :\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$$

2. Avec h la fonction définie sur $I=\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x)=\dfrac{x^3}{3}+2\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}$.

La fonction h est définie et dérivable sur I.

On a alors directement en appliquant les formules du cours et pour tout réel x de $I=\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{h'(x)=\frac{3x^2}{3}+2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

L'équation de T_2 la tangente au point d'abscisse 1 est $y=h'(1)(x-1)+h(1)$

$$\left\{\begin{array}{ll} h(1) & =\dfrac{17}{6} \\ h'(1) & =2\end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T\ :\ y=2(x-1)+\frac{17}{6} \text{ soit } \boxed{(T_2)\quad :\ y=2x+\frac{5}{6}}$$

3. Avec i la fonction définie sur $I=\mathbb{R}$ par : $i(x)=\left(x^2-2x+3\right)^2$.

La fonction i est définie et dérivable sur I. La fonction i est de la forme u^2 et donc de fonction dérivée $2u'u$ avec

$u(x)=x^2-2x+3$	$u'(x)=2x-2$

Pour tout réel x de $I=\mathbb{R}$ on a donc

$$\boxed{i'(x)=2(2x-2)(x^2-2x+3)}$$

L'équation de T_3 la tangente au point d'abscisse 1 est $y=i'(1)(x-1)+i(1)$

$$\left\{\begin{array}{ll} i(1) & =4 \\ i'(1) & =0\end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T\ :\ y=0(x-1)+4 \text{ soit } \boxed{(T_3)\quad :\ y=4}$$

La tangente T_3 est une tangente horizontale.