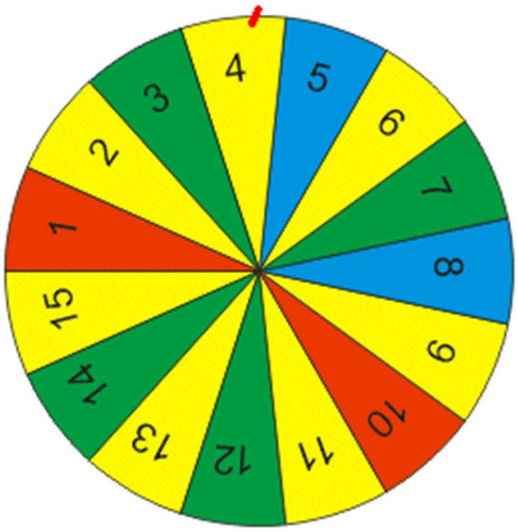
Exercice 01

L'ensemble des éventualités est :

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$

On suppose tous les tirages équiprobables, on a alors pour tout événement A, $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$.



1°) E est l'événement « le numéro est multiple de 5 » ;

donc $E = \{ 5 ; 10 ; 15 \}$

donc $p(E) = \dfrac{\text{card } E}{\text{card } \Omega} = \dfrac{3}{15}$ c'est-à-dire $p(E) = \dfrac{1}{5}$.

F est l'événement « le numéro n'est pas multiple de 5 »

donc $F = \overline{E}$ donc $p(F) = 1 - p(E) = 1 - \dfrac{1}{5}$

donc $p(F) = \dfrac{4}{5}$.

G est l'événement « le numéro est pair et inférieur à 11 »

donc $G = \{ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 \}$ donc $p(G) = \dfrac{5}{15}$ donc $p(G) = \dfrac{1}{3}$.

On a $E \cap G = \{ 10 \}$ donc $p(E \cap G) = \dfrac{1}{15}$.

On sait que $p(E \cup G) = p(E) + p(G) - p(E \cap G) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{3}{15} + \dfrac{5}{15} - \dfrac{1}{15}$ donc $p(E \cup G) = \dfrac{7}{15}$.

2°) La variable aléatoire X prend les valeurs 0 ; 10 ; 30 et 100.

On a donc $X(\Omega) = \{ 0 ; 10 ; 30 ; 100 \}$.

Sachant que l'on a 7 secteurs jaunes auxquels on associe $X = 0$, on a $p(X = 0) = \dfrac{7}{15}$

Sachant que l'on a 4 secteurs verts auxquels on associe $X = 10$, on a $p(X = 10) = \dfrac{4}{15}$

Sachant que l'on a 2 secteurs rouges auxquels on associe $X = 30$, on a $p(X = 30) = \dfrac{2}{15}$

Sachant que l'on a 2 secteurs bleus auxquels on associe $X = 100$, on a $p(X = 100) = \dfrac{2}{15}$

On peut donner la loi de probabilité de X dans le tableau :

x_i	0	10	30	100
$p(X = x_i)$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{2}{15}$

(On peut vérifier que la somme des probabilités est égale à 1)

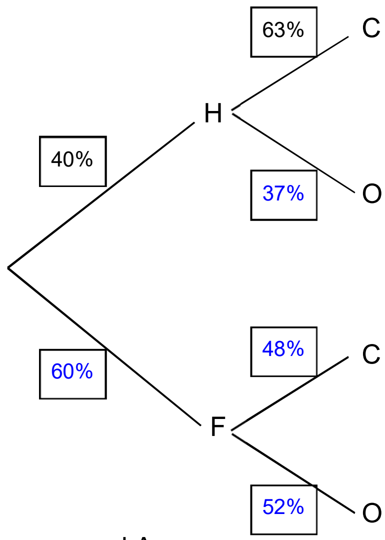
L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \sum x_i \times p(X = x_i) = 0 \times \dfrac{7}{15} + 10 \times \dfrac{4}{15} + 30 \times \dfrac{2}{15} + 100 \times \dfrac{2}{15}$

Donc $E(X) = \dfrac{0 + 40 + 60 + 200}{15} = \dfrac{300}{15}$ donc $E(X) = 20$.

On peut interpréter ce résultat en disant que le gain moyen par partie du joueur est de 20 euros.

3°)
- Si la roue s'arrête sur un secteur rouge, il n'y a que deux numéros possibles : 1 ou 10.
  Si A parie que le numéro est 15, la probabilité qu'il gagne est nulle : $p = 0$.
- Si la roue s'arrête sur un secteur vert, quatre numéros sont possibles : 3 ; 7 ; 12 ; 14
  Si A parie que le numéro est 3, la probabilité qu'il gagne est : $p = \dfrac{1}{4}$.
- Si la roue s'arrête sur un secteur bleu, deux numéros sont possibles : 3 ou 8.
  Si A parie que le numéro est 8, la probabilité qu'il gagne est : $p = \dfrac{1}{2}$.
- Si la roue s'arrête sur un secteur jaune, sept numéros sont possibles : 2 ; 4 ; 6 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15
  Si A parie que le numéro n'est pas le 14, il est certain de gagner ; la probabilité qu'il gagne est : $p = 1$.

<u>Exercice 02</u>



1°) On complète l'arbre en utilisant les données du texte.
Parmi les hommes 63% sont cadres, donc 37% sont ouvriers.
Parmi les femmes 48% sont cadres, donc 52% sont ouvriers.

2°) L'entreprise a 1 500 employés, dont 60% de femmes.

$1\,500 \times 60\,\% = 1\,500 \times \dfrac{60}{100} = 900$

Il y a 900 femmes dans l'entreprise.
Sur les 900 femmes de l'entreprise, 48% sont cadres.

$900 \times 48\,\% = 900 \times \dfrac{48}{100} = 432$

Il y a 432 femmes cadres dans l'entreprise.

3°) On choisit au hasard une personne de l'entreprise.
On suppose donc que les éventualités sont équiprobables.
Sachant qu'il y a 1 500 employés, pour tout événement A, on a donc $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{1\,500}$

- Puisqu'il y a 900 femmes dans l'entreprise, la probabilité p(F) que la personne choisie soit une femme est : $p(F) = \dfrac{900}{1\,500}$ donc $p(F) = 0{,}6$

  NB : Puisqu'il y a 60 % de femmes dans l'entreprise, on pourrait écrire simplement $p(F) = 60\,\% = 0{,}6$

- Puisqu'il y a 432 femmes cadres dans l'entreprise, la probabilité $p(F \cap C)$ que la personne choisie soit une femme cadre est : $p(F \cap C) = \dfrac{432}{1\,500}$ donc $p(F \cap C) = 0{,}288$

  NB : Puisque 48 % des 60 % de femmes de l'entreprise sont cadres, on pourrait écrire simplement $p(F \cap C) = 48\,\% \times 60\,\% = 0{,}48 \times 0{,}6 = 0{,}288$

4°) On choisit au hasard une femme de l'entreprise.
Sachant que 48 % des femmes sont cadres, la probabilité que cette femme soit cadre est :
$p_F(C) = 48\,\% = 0{,}48$

On a $p(F \cap C) = 0{,}288$
et $p_F(C) \times p(F) = 0{,}48 \times 0{,}6 = 0{,}288$

Donc $p(F \cap C) = p_F(C) \times p(F)$

On en déduit que $p_F(C) = \dfrac{p(F \cap C)}{p(F)}$

Exercice 03

Un sac contient 10 jetons : six jetons rouges numérotés 1, 1, 1, 2, 2, 4
quatre jetons verts numérotés 2, 2, 4, 4.

1°) a) On tire au hasard un jeton du sac, on suppose donc tous les tirages équiprobables.

R est l'événement "tirer un jeton rouge". Comme il y a six jetons rouges, on a $p(R) = \frac{6}{10}$ donc $p(R) = \frac{3}{5}$

V est l'événement "tirer un jeton vert". Comme il y a quatre jetons verts, on a $p(V) = \frac{4}{10}$ donc $p(V) = \frac{2}{5}$

1 est l'événement "tirer un jeton numéro 1". Comme il y a trois jetons numéro 1, on a $p(1) = \frac{3}{10}$

b) Tous les jetons portant le numéro 1 sont rouges, on a donc $R \cup 1 = R$ et $R \cap 1 = 1$

Donc $p(R \cup 1) = p(R) = \frac{3}{5}$ et $p(R \cap 1) = p(1) = \frac{3}{10}$

2°) a) On tire au hasard un jeton, et on voit qu'il est vert, on est alors certain que le jeton ne peut pas porter le numéro 1 puisqu'aucun jeton vert ne porte le numéro 1.
On a donc $p_V(1) = 0$.

b) Sachant que le jeton est rouge, la probabilité pour que ce jeton porte le numéro 1 est

$p_R(1) = \frac{3}{6}$ puisque 3 jetons rouges sur 6 portent le numéro 1.

De même $p_R(2) = \frac{2}{6}$; $p_R(4) = \frac{1}{6}$; $p_V(2) = \frac{2}{4}$; $p_V(4) = \frac{2}{4}$

On obtient donc $p_R(1) = \frac{1}{2}$; $p_R(2) = \frac{1}{3}$; $p_R(4) = \frac{1}{6}$; $p_V(2) = \frac{1}{2}$; $p_V(4) = \frac{1}{2}$

On a $p_R(1) + p_R(2) + p_R(4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ donc $p_R(1) + p_R(2) + p_R(4) = 1$

et $p_V(1) + p_V(2) + p_V(4) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ donc $p_V(1) + p_V(2) + p_V(4) = 1$

c) On a $p(1 \cap R) = p(1) = \frac{3}{10}$ et $p(R) = \frac{3}{5}$ donc $\frac{p(1 \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ et on a vu que $p_R(1) = \frac{1}{2}$

On a donc $p_R(1) = \frac{p(1 \cap R)}{p(R)}$

3°) Sachant que le jeton porte le numéro 2, la probabilité pour qu'il soit rouge est $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, en effet il y a quatre jetons portant le numéro 2 et parmi ces quatre jetons, deux sont rouges donc $p_2(R) = \frac{1}{2}$

$R \cap 2$ est l'événement "le jeton est rouge et porte le numéro 2".

Il y a deux jetons qui sont rouges et qui portent le numéro 2, on a donc $p(R \cap 2) = \frac{2}{10}$

2 est l'événement "le jeton porte le numéro 2".

Il y a quatre jetons qui portent le numéro 2, on a donc $p(2) = \frac{4}{10}$

Donc $\frac{p(R \cap 2)}{p(2)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et on a vu que $p_2(R) = \frac{1}{2}$. On a donc $p_2(R) = \frac{p(R \cap 2)}{p(2)}$

Exercice 04

L'élève étant choisi au hasard, tous les choix sont équiprobables.
On note Ω l'ensemble des 1 234 choix possibles (c'est-à-dire l'ensemble des 1 234 élèves).
On a alors pour tout événement A, $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$

1°) La probabilité que l'élève choisi soit une fille de Terminale est :

$p(F \cap T) = \dfrac{\text{card } F \cap T}{\text{card } \Omega} = \dfrac{213}{1\,234}$ donc $p(F \cap T) \approx 0{,}173$

2°) La probabilité que l'élève choisi soit une fille est :

$p(F) = \dfrac{\text{card } F}{\text{card } \Omega} = \dfrac{654}{1\,234}$ donc $p(F) \approx 0{,}530$

3°) La probabilité que l'élève choisi soit un élève de Terminale est :

$p(T) = \dfrac{\text{card } T}{\text{card } \Omega} = \dfrac{405}{1\,234}$ donc $p(T) \approx 0{,}328$

4°) On sait que l'élève choisi est un garçon, la probabilité qu'il soit en Seconde se calcule alors en se basant sur l'ensemble des garçons et sur l'ensemble des garçons en Seconde

$p_G(S) = \dfrac{\text{card } G \cap S}{\text{card } G} = \dfrac{203}{580}$ donc $p_G(S) = 0{,}35$

5°) On sait que l'élève choisi est une fille, la probabilité que cet élève soit en Terminale est :

$p_F(T) = \dfrac{\text{card } F \cap T}{\text{card } F} = \dfrac{213}{654}$ donc $p_F(T) \approx 0{,}326$

On a $p_F(T) = \dfrac{P(F \cap T)}{p(F)} = \dfrac{\frac{213}{1\,234}}{\frac{654}{1\,234}} = \dfrac{213}{1\,234} \times \dfrac{1234}{654} = \dfrac{213}{654}$

D'après les questions 1 et 2 on a $p(F \cap T) \approx 0{,}173$ et $p(F) \approx 0{,}530$ et de plus $\dfrac{0{,}173}{0{,}530} \approx 0{,}326$

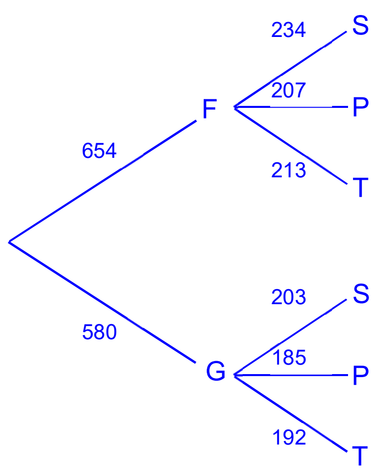
6°) On sait que l'élève choisi est un élève de Terminale, la probabilité que ce soit une fille est :

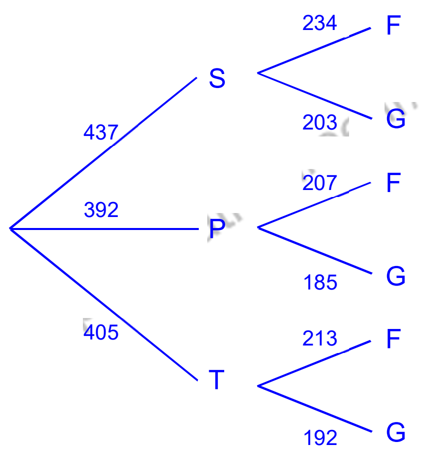
$p_T(F) = \dfrac{\text{card } F \cap T}{\text{card } T} = \dfrac{213}{405}$ donc $p_T(F) \approx 0{,}526$

On a $p_T(F) = \dfrac{P(F \cap T)}{p(T)} = \dfrac{\frac{213}{1234}}{\frac{405}{1234}} = \dfrac{213}{1234} \times \dfrac{1234}{405} = \dfrac{213}{405}$

D'après les questions 1 et 3 on a $p(F \cap T) \approx 0{,}173$ et $p(T) \approx 0{,}328$ et de plus $\dfrac{0{,}173}{0{,}328} \approx 0{,}527$

7°) On peut illustrer cet exercice par l'un des deux arbres pondérés ci-dessous :

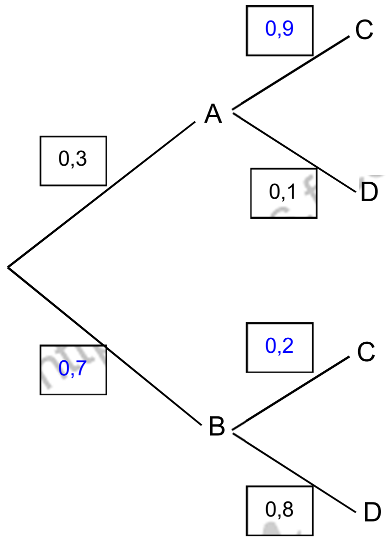




NB : à la place des effectifs, on pourrait faire figurer sur les branches des arbres les pourcentages ou les probabilités.

Exercice 05

On peut compléter cet arbre en sachant que la somme des probabilités des différentes branches issues d'un même nœud est égale à 1.



Par lecture directe de l'arbre on a : $p(B) = 0{,}7$ et $p_A(C) = 0{,}9$.

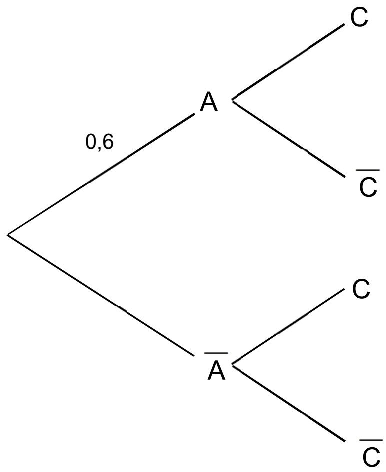
On peut écrire :
$p(A \cap C) = p_A(C) \times p(A) = 0{,}9 \times 0{,}3$ donc $p(A \cap C) = 0{,}27$.

$p(C) = p(A \cap C) + p(B \cap C) = p_A(C) \times p(A) + p_B(C) \times p(B) = 0{,}9 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}27 + 0{,}14$
Donc $p(C) = 0{,}41$.

$p(D) = p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - 0{,}41$ donc $p(D) = 0{,}59$
On pourrait aussi écrire :
$p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D) = p_A(D) \times p(A) + p_B(D) \times p(B) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}03 + 0{,}56 = 0{,}59$

$p_C(A) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}27}{0{,}41}$ donc $p_C(A) = \dfrac{27}{41}$. On a $p_C(A) \approx 0{,}66$

Exercice 06



On peut considérer l'arbre de probabilités ci-contre pour traduire la situation :

On sait que : $p(A) = 0{,}6$; $p(C) = 0{,}5$; $p(A \cap C) = 0{,}18$

On peut indiquer les différentes probabilités sur les branches de l'arbre et répondre aux questions en notant que :

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}6$ donc $p(\overline{A}) = 0{,}4$.

$p_A(C) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(A)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}6}$ donc $p_A(C) = 0{,}3$.

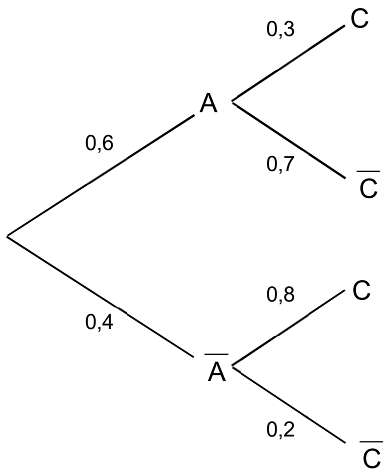
La somme des probabilités des différentes branches issues d'un même nœud est égale à 1, donc
$p_A(\overline{C}) + p_A(C) = 1$ c'est-à-dire $p_A(\overline{C}) = 1 - p_A(C) = 1 - 0{,}3$ donc $p_A(\overline{C}) = 0{,}7$.

On a $p(C) = p(A \cap C) + p(\overline{A} \cap C)$ donc
$p(\overline{A} \cap C) = p(C) - p(A \cap C) = 0{,}5 - 0{,}18$ donc $p(\overline{A} \cap C) = 0{,}32$.

On sait que $p_{\overline{A}}(C) = \dfrac{p(\overline{A} \cap C)}{p(\overline{A})} = \dfrac{0{,}32}{0{,}4}$ donc $p_{\overline{A}}(C) = 0{,}8$.

La somme des probabilités des différentes branches issues d'un même nœud est égale à 1, donc
$p_{\overline{A}}(\overline{C}) + p_{\overline{A}}(C) = 1$ c'est-à-dire $p_{\overline{A}}(\overline{C}) = 1 - p_{\overline{A}}(C) = 1 - 0{,}8$ donc $p_{\overline{A}}(\overline{C}) = 0{,}2$.

On peut alors compléter l'arbre de probabilités :

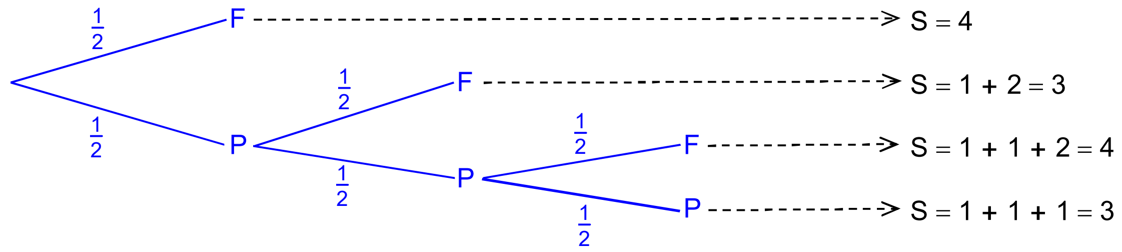


On sait que :
$p_C(\overline{A}) = \dfrac{p(C \cap \overline{A})}{p(C)} = \dfrac{0{,}32}{0{,}5}$ donc $p_C(\overline{A}) = 0{,}64$

Exercice 07

On suppose que la pièce de monnaie est parfaitement équilibrée, alors "pile" et "face" sont équiprobables, et chacun a une probabilité de $\frac{1}{2}$.

On note S la somme obtenue à la fin du jeu. On peut représenter le jeu par l'arbre ci-dessous :



On peut obtenir S = 4 en obtenant face au premier jet de la pièce, ou en obtenant successivement pile, pile et face.

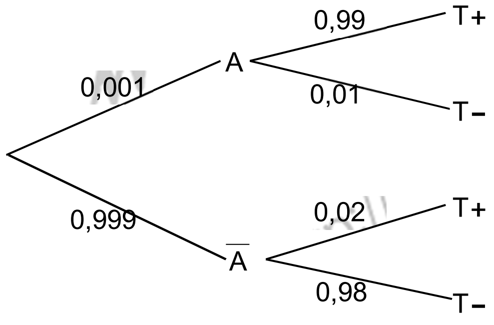
On en déduit que $p(S=4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. On a donc $p(S=4) = \frac{5}{8}$.

Exercice 08

On choisit un enfant au hasard.

On note A l'événement : « l'enfant est porteur du caractère génétique A » et $\overline{A}$ son contraire.
On note T+ l'événement : « le test est positif » et T− le contraire de T+.

1°) En sachant que dans la population étudiée, un enfant sur 1000 est porteur du caractère A, on peut faire l'arbre pondéré suivant :



$p(A \cap T+) = 0,001 \times 0,99 = 0,00099$

$p(A \cap T-) = 0,001 \times 0,01 = 0,00001$

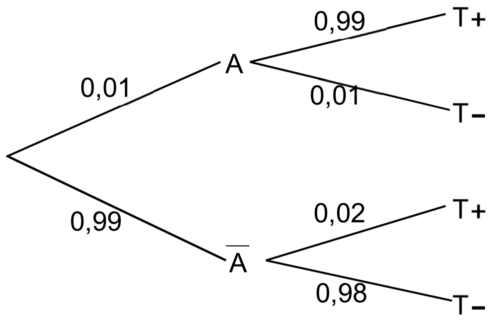
$p(\overline{A} \cap T+) = 0,999 \times 0,02 = 0,01998$

$p(\overline{A} \cap T-) = 0,999 \times 0,98 = 0,97902$

L'événement T+ « avoir un test positif » est la réunion des deux événements disjoints $A \cap T+$ et $\overline{A} \cap T+$.
On a donc $p(T+) = p(A \cap T+) + p(\overline{A} \cap T+)$
D'après l'arbre pondéré $P(T+) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,02 = 0,00099 + 0,01998$ donc $p(T+) = 0,02097$
La probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A, notée $p_{T+}(A)$ est :

$p_{T+}(A) = \dfrac{p(A \cap T+)}{p(T+)} = \dfrac{0,00099}{0,02097}$ donc $p_{T+}(A) = \dfrac{11}{233}$ on trouve $p_{T+}(A) \approx 4,7\%$.

2°) Si le test est utilisé avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 100 était porteur du caractère A, on pourra faire l'arbre pondéré suivant :



$p(A \cap T+) = 0,01 \times 0,99 = 0,0099$

$p(A \cap T-) = 0,01 \times 0,01 = 0,0001$

$p(\overline{A} \cap T+) = 0,99 \times 0,02 = 0,0198$

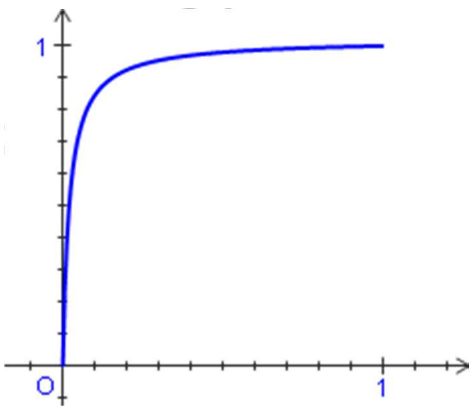
$p(\overline{A} \cap T-) = 0,99 \times 0,98 = 0,9702$

On a alors $P(T+) = 0,01 \times 0,99 + 0,99 \times 0,02 = 0,0099 + 0,0198$ donc $p(T+) = 0,0297$
La probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A, est :

$p_{T+}(A) = \dfrac{p(A \cap T+)}{p(T+)} = \dfrac{0,0099}{0,0297}$ donc $p_{T+}(A) = \dfrac{1}{3}$ on trouve $p_{T+}(A) \approx 33,3\%$.

3°) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant avait une probabilité p d'être porteur du caractère A.
En utilisant la même méthode qu'aux questions précédentes, on peut écrire
$P(T+) = p \times 0,99 + (1 - p) \times 0,02 = 0,97p + 0,02$
La probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A, est :

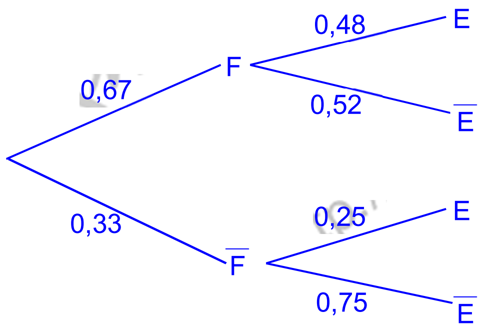
$p_{T+}(A) = \dfrac{p(A \cap T+)}{p(T+)} = \dfrac{0,99p}{0,97p + 0,02}$ donc $V(p) = \dfrac{99p}{97p + 2}$



La représentation graphique de V(p) pour $p \in [0 ; 1]$ permet de voir que la valeur prédictive est satisfaisante (proche de 1) lorsque le test est appliqué à une population pour laquelle le risque est assez important (p supérieur à 0,1 ou 0,2).
Dans le cas contraire, la valeur prédictive est faible.
Un tel test appliqué à une population ayant un risque faible comme dans le 1°) conduit à un résultat non satisfaisant dans 95% des cas. Il peut donc avoir dans un tel cas un effet beaucoup plus néfaste (inquiétude, stress,…) que bénéfique.

Exercice 09

1°) On peut représenter la situation par un arbre pondéré.
On note F l'événement «le véhicule choisi présente un défaut de freinage» et $\overline{F}$ le contraire de F.
On note E l'événement «le véhicule choisi présente un défaut d'éclairage» et $\overline{E}$ le contraire de E.
En utilisant le fait que la somme des probabilités des différentes branches issues d'un même nœud est égale à 1, on obtient l'arbre ci-dessous :



$p(F \cap E) = p(F) \times p_F(E) = 0{,}67 \times 0{,}48 = 0{,}3216$

$p(F \cap \overline{E}) = p(F) \times p_F(\overline{E}) = 0{,}67 \times 0{,}52 = 0{,}3484$

$p(\overline{F} \cap E) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(E) = 0{,}33 \times 0{,}25 = 0{,}0825$

$p(\overline{F} \cap \overline{E}) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(\overline{E}) = 0{,}33 \times 0{,}75 = 0{,}2475$

On a $p(E) = p(F \cap E) + p(\overline{F} \cap E) = 0{,}3216 + 0{,}0825 = 0{,}4041$.
La probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard présente un défaut d'éclairage est de 0,4041.
On peut penser qu'environ 40% des véhicules de ce parc présentent un défaut d'éclairage.

2°) La probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard parmi les véhicules présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage est $p_E(F)$.

On sait que $p_E(F) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(E)} = \dfrac{0{,}3216}{0{,}4041} = \dfrac{1072}{1347}$

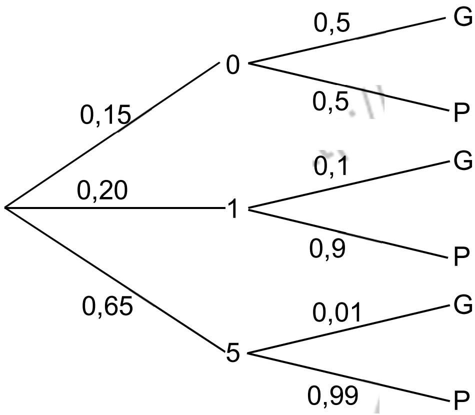
La probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard parmi les véhicules présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage est $\dfrac{1072}{1347}$ c'est-à-dire environ 0,7958.

On peut penser qu'environ 80% des véhicules présentant un défaut d'éclairage présentent aussi un défaut de freinage.

Exercice 10

On peut représenter la situation par un arbre de probabilités.
On note 0 l'événement : « le client est reconnu comme client habituel » ;
1 l'événement : « le client est reconnu comme client occasionnel » ;
5 l'événement : « le client n'est pas reconnu » ;
G l'événement : « le client gagne un cadeau » ;
P l'événement : « le client ne gagne pas de cadeau ».

On obtient les probabilités sur les différentes branches en utilisant l'énoncé et le fait que la somme des probabilités des différentes branches issues d'un même nœud est égale à 1.



$p(0 \cap G) = p(0) \times p_0(G) = 0,15 \times 0,5 = 0,075$

$p(0 \cap P) = p(0) \times p_0(P) = 0,15 \times 0,5 = 0,075$

$p(1 \cap G) = p(1) \times p_1(G) = 0,20 \times 0,1 = 0,02$

$p(1 \cap P) = p(1) \times p_1(P) = 0,20 \times 0,9 = 0,18$

$p(5 \cap G) = p(5) \times p_5(G) = 0,65 \times 0,01 = 0,0065$

$p(5 \cap P) = p(5) \times p_5(P) = 0,65 \times 0,99 = 0,6435$

On choisit un visiteur au hasard.

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité pour qu'il gagne un cadeau est :

$p(G) = p(0 \cap G) + p(1 \cap G) + p(5 \cap G) = p_0(G) \times p(0) + p_1(G) \times p(1) + p_5(G) \times p(5)$

donc $p(G) = 0,5 \times 0,15 + 0,1 \times 0,2 + 0,01 \times 0,65 = 0,075 + 0,02 + 0,0065 = 0,1015$

La probabilité pour qu'un visiteur choisi au hasard gagne un cadeau est 0,1015.

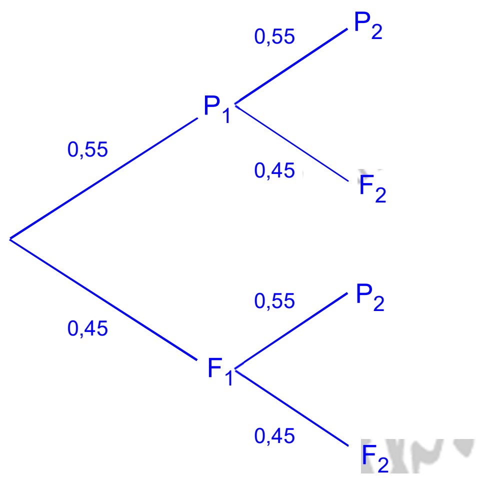
La probabilité qu'un visiteur ayant gagné un cadeau ait été reconnu comme client habituel est :

$p_G(0) = \dfrac{p(G \cap 0)}{p(G)} = \dfrac{0,075}{0,1015} = \dfrac{150}{203}$ donc $p_G(0) \approx 0,7389$

La probabilité qu'un visiteur ayant gagné un cadeau ait été reconnu comme client habituel est $\dfrac{150}{203}$ c'est-à-dire environ 0,74.

Exercice 11

La pièce n'est pas équilibrée et on sait qu'à chaque tirage la probabilité d'obtenir pile est 0,55.
La probabilité d'obtenir face est donc $1 - 0{,}55 = 0{,}45$
On jette successivement deux fois cette pièce.
On peut traduire la situation par l'arbre de probabilités ci-dessous :



NB : D'après les règles d'utilisation d'un arbre de probabilités, les probabilités portées sur les branches de niveau 2 sont des probabilités conditionnelles. Mais, dans ce cas particulier, le résultat au deuxième lancer de la pièce ne dépend pas du résultat obtenu au premier lancer. On a toujours une probabilité égale à 0,55 d'obtenir pile et une probabilité égale à 0,45 d'obtenir face. (Les deux lancers de la pièce sont indépendants)

A l'issue des deux tirages successifs :

- la probabilité d'avoir obtenu deux fois pile est :
  $p_1 = p(P_1 \cap P_2) = 0{,}55 \times 0{,}55$ donc $p_1 = 0{,}3025$
  On peut aussi obtenir ce résultat en utilisant un schéma de Bernoulli et la loi binomiale B(2 ; 0,55).
  La probabilité d'obtenir deux fois pile est :
  $p(P = 2) = \binom{2}{2} \times 0{,}55^2 \times 0{,}45^{2-2} = 1 \times 0{,}55^2 \times 1 = 0{,}3025$.

- la probabilité d'avoir obtenu deux résultats identiques est :
  $p_2 = p(P_1 \cap P_2) + p(F_1 \cap F_2) = 0{,}55 \times 0{,}55 + 0{,}45 \times 0{,}45 = 0{,}3025 + 0{,}2025$ donc $p_2 = 0{,}505$
  On peut aussi obtenir ce résultat en utilisant un schéma de Bernoulli et la loi binomiale B(2 ; 0,55).
  La probabilité d'obtenir deux résultats identiques est :
  $p(P = 2) + p(P = 0) = \binom{2}{2} \times 0{,}55^2 \times 0{,}45^0 + \binom{2}{0} \times 0{,}55^0 \times 0{,}45^2 = 0{,}55^2 + 0{,}45^2 = 0{,}505$.

- la probabilité d'avoir obtenu deux résultats différents est :
  $p_3 = p(P_1 \cap F_2) + p(F_1 \cap P_2) = 0{,}55 \times 0{,}45 + 0{,}45 \times 0{,}55 = 0{,}2475 + 0{,}2475$ donc $p_3 = 0{,}495$
  NB : on pourrait aussi remarquer que l'événement «obtenir deux résultats différents» est le contraire de l'événement «obtenir deux résultats identiques». Donc $p_3 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}505 = 0{,}495$
  On peut aussi obtenir ce résultat en utilisant un schéma de Bernoulli et la loi binomiale B(2 ; 0,55).
  La probabilité d'obtenir deux résultats différents est :
  $p(P = 1) = \binom{2}{1} \times 0{,}55^1 \times 0{,}45^1 = 2 \times 0{,}55 \times 0{,}45 = 0{,}495$.

Exercice 12

La pièce de monnaie étant équilibrée, à chaque tirage la probabilité d'obtenir "pile" et la probabilité d'obtenir "face" sont égales à 0,5.
On jette trois fois de suite cette pièce de monnaie. Si l'on note P le nombre de fois que l'on obtient pile, on peut utiliser un schéma de Bernoulli et la loi binomiale B(3 ; 0,5)

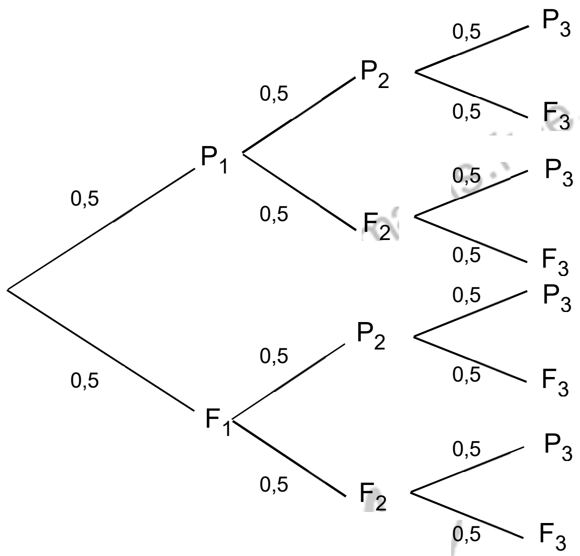
La probabilité d'obtenir « trois fois "pile" » est :
$p_1 = p(P = 3) = \binom{3}{3} \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^0 = 1 \times 0{,}5^3 \times 1 = 0{,}125$ donc $p_1 = 0{,}125$

La probabilité d'obtenir « trois fois "face" » est la probabilité d'obtenir « zéro fois "pile" »
$p_2 = p(P = 0) = \binom{3}{0} \times 0{,}5^0 \times 0{,}5^3 = 1 \times 1 \times 0{,}5^3 = 0{,}125$ donc $p_2 = 0{,}125$

La probabilité d'obtenir « exactement deux fois "pile" » est :
$p_3 = p(P = 2) = \binom{3}{2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^1 = 3 \times 0{,}5^2 \times 0{,}5 = 0{,}375$ donc $p_3 = 0{,}375$

La probabilité d'obtenir « au moins deux fois "pile" » est la probabilité d'obtenir deux fois "pile" ou trois fois "pile"
$p_4 = p(P = 2) + p(P = 3) = \binom{3}{2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^1 + \binom{3}{3} \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^0 = 0{,}375 + 0{,}125$ donc $p_4 = 0{,}5$

Cette situation peut être modélisée par l'arbre ci-dessous :



Si la pièce n'est pas équilibrée et si "pile" a une probabilité de 0,6 , alors "face" a une probabilité de 0,4.
On utilise alors la loi binomiale B(3 ; 0,6) et on obtient :

$p_1 = p(P = 3) = \binom{3}{3} \times 0{,}6^3 \times 0{,}4^0 = 1 \times 0{,}6^3 \times 1 = 0{,}216$ donc $p_1 = 0{,}216$

$p_2 = p(P = 0) = \binom{3}{0} \times 0{,}6^0 \times 0{,}4^3 = 1 \times 1 \times 0{,}4^3 = 0{,}064$ donc $p_2 = 0{,}064$

$p_3 = p(P = 2) = \binom{3}{2} \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^1 = 3 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4 = 0{,}432$ donc $p_3 = 0{,}432$

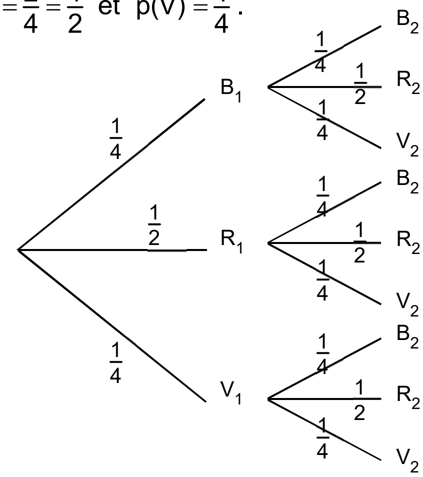
$p_4 = p(P = 2) + p(P = 3) = \binom{3}{2} \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^1 + \binom{3}{3} \times 0{,}6^3 \times 0{,}4^0 = 0{,}432 + 0{,}216$ donc $p_4 = 0{,}648$

Exercice 13

1°) Le dé étant parfaitement équilibré on peut supposer que ses quatre faces sont équiprobables.
La probabilité de chaque face est donc égale à $\frac{1}{4}$.

On s'intéresse à la couleur de la face cachée. Sachant que le dé possède une face bleue, deux faces rouges et une face verte, à chaque lancer on a $p(B) = \frac{1}{4}$; $p(R) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $p(V) = \frac{1}{4}$.

Une partie consiste à effectuer deux lancers sucessifs et indépendants de ce dé, on peut représenter cette partie par l'arbre de probabilités ci-contre :



Les deux lancers étant indépendants, les probabilités portées sur les branches de niveau 2 sont identiques à celles portées sur les branches de niveau 1.

On a par exemple $p_{B_1}(B_2) = p(B) = \frac{1}{4}$

- E est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
  On a $p(E) = p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = p(V_1) \times p(V_2)$ (les deux lancers sont indépendants)
  donc $p(E) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ donc $p(E) = \frac{1}{16}$.

- F est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».
  F est la réunion des trois événements $B_1 \cap B_2$; $R_1 \cap R_2$ et $V_1 \cap V_2$ ces trois éléments étants deux à deux disjoints.
  On a $p(F) = p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2) + p(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
  donc $p(F) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16}$ donc $p(F) = \frac{3}{8}$.

- On peut écrire $p_F(E) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$
  Or $E \cap F = E$ donc $p_F(E) = \frac{p(E)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{16} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ donc $p_F(E) = \frac{1}{6}$.

2°) On effectue dix parties identiques et indépendantes. l'événement F a une probabilité $p(F) = \frac{3}{8}$.

On utilise alors la loi binomiale $B\left(10 ; \frac{3}{8}\right)$.

a) Notons f le nombre de fois que l'on obtient F au cours de ces dix parties.
La probabilité d'obtenir trois fois F au cours de ces dix parties est :
$p(f = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10-3} = \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^7 = 120 \times \frac{3^3 \times 5^7}{8^{10}}$. On trouve $p(f = 3) \approx 0{,}236$

b) La probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement F au cours des dix parties est $p(f \geqslant 2)$
En passant par l'événement contraire, on peut écrire $p(f \geqslant 2) = 1 - p(f < 2) = 1 - p(f = 0) - p(f = 1)$.
On a $p(f = 0) = \binom{10}{0} \times \left(\frac{3}{8}\right)^0 \times \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10} = \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$
et $p(f = 1) = \binom{10}{1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^1 \times \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10-1} = 10 \times \frac{3}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^9 = 10 \times \frac{3 \times 5^9}{8^{10}}$
donc $p(f \geqslant 2) = 1 - \frac{5^{10}}{8^{10}} - 10 \times \frac{3 \times 5^9}{8^{10}}$. On trouve $p(f \geqslant 2) \approx 0{,}936$.

Exercice 14

1°) L'algorithme ci-contre permet de faire 10 000 simulations des trois premiers déplacements de la puce.

En utilisant plusieurs fois cet algorithme, on peut noter que
sur 10 000 simulations on obtient environ
- 0 fois la position A
- 500 à 600 fois la position B
- 9 400 à 9 500 fois la position C

```
***Algorithme lancé***
0
538
9462

***Algorithme terminé***
```

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  position EST_DU_TYPE CHAINE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 0
  b PREND_LA_VALEUR 0
  c PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10000
    DEBUT_POUR
    position PREND_LA_VALEUR "A"
    POUR j ALLANT_DE 1 A 3
      DEBUT_POUR
      n PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,6)
      SI (position=="A") ALORS
        DEBUT_SI
        SI (n<=2) ALORS
          DEBUT_SI
          position PREND_LA_VALEUR "B"
          FIN_SI
          SINON
            DEBUT_SINON
            position PREND_LA_VALEUR "C"
            FIN_SINON
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          SI (position=="B") ALORS
            DEBUT_SI
            SI (n<=3) ALORS
              DEBUT_SI
              position PREND_LA_VALEUR "C"
              FIN_SI
              SINON
                DEBUT_SINON
                position PREND_LA_VALEUR "A"
                FIN_SINON
            FIN_SI
          FIN_SINON
      FIN_POUR
    SI (position=="A") ALORS
      DEBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR a+1
      FIN_SI
    SI (position=="B") ALORS
      DEBUT_SI
      b PREND_LA_VALEUR b+1
      FIN_SI
    SI (position=="C") ALORS
      DEBUT_SI
      c PREND_LA_VALEUR c+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  AFFICHER a
  AFFICHER b
  AFFICHER c
FIN_ALGORITHME
```

2°) Pour effectuer 10 000 simulations des quatre premiers déplacements, il suffit de modifier la boucle

```
POUR j ALLANT_DE 1 A 3
```
en
```
POUR j ALLANT_DE 1 A 4
```

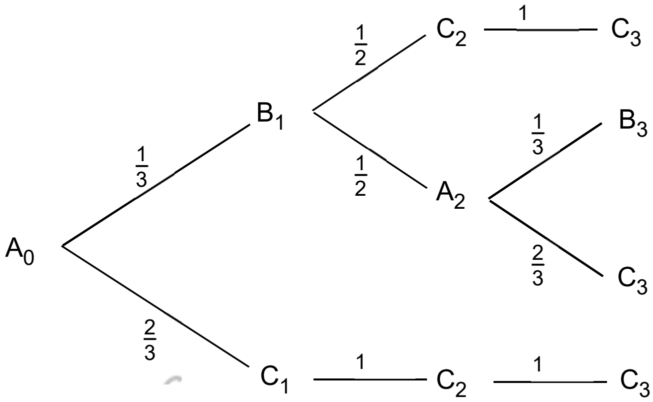
En utilisant plusieurs fois cet algorithme, on peut noter que
sur 10 000 simulations on obtient environ
250 à 300 fois la position A
0 fois la position B
9 700 à 9 750 fois la position C


```
***Algorithme lancé***
297
0
9703

***Algorithme terminé***
```

3°) On peut représenter les trois premiers déplacements avec l'arbre de probabilités ci-contre :

$a_3 = \text{p}(A_3)$
$b_3 = \text{p}(B_3)$
$c_3 = \text{p}(C_3)$

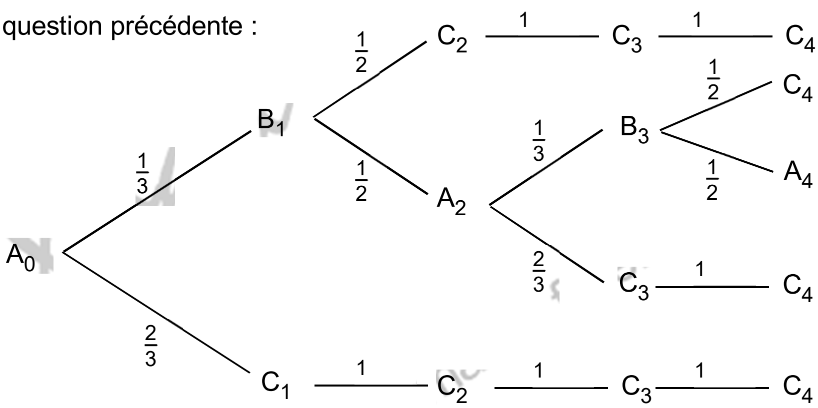


On peut noter que
$a_3 = 0$
$b_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ donc $b_3 = \frac{1}{18}$
On en déduit que $c_3 = 1 - a_3 - b_3 = 1 - \frac{1}{18}$

donc $c_3 = \frac{17}{18}$

Ces résultats sont conformes au résultats du 1°), en effet
$10\,000 \times 0 = 0$; $10\,000 \times \frac{1}{18} \approx 556$ et $10\,000 \times \frac{17}{18} \approx 9\,444$

4°) On complète l'arbre prondéré de la question précédente :



$a_4 = \text{p}(A_4)$
$b_4 = \text{p}(B_4)$
$c_4 = \text{p}(C_4)$

On peut noter que
$a_4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ donc $a_4 = \frac{1}{36}$
$b_4 = 0$
On en déduit que $c_4 = 1 - a_4 - b_4 = 1 - \frac{1}{36}$

donc $c_4 = \frac{35}{36}$

Ces résultats sont conformes au résultats du 2°), en effet
$10\,000 \times \frac{1}{36} \approx 278$; $10\,000 \times 0 = 0$ et $10\,000 \times \frac{35}{36} \approx 9\,722$

5°) À l'instant n, la puce ne peut être qu'en A, en B ou en C. On a donc $a_n + b_n + c_n = 1$

D'après les déplacements possibles de la puce, pour qu'elle soit en A à l'instant $n+1$ il faut nécessairement qu'elle ait été en B à l'instant n et on sait que si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est de façon équiprobable en C ou en A, donc elle est en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

On a donc $p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) = \frac{1}{2} p(B_n)$ donc $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$.

D'après les déplacements possibles de la puce, pour qu'elle soit en B à l'instant $n+1$ il faut nécessairement qu'elle ait été en A à l'instant n et on sait que si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$.

On a donc $p(B_{n+1}) = p(B_{n+1} \cap A_n) = p_{A_n}(B_{n+1}) \times p(A_n) = \frac{1}{3} p(A_n)$ donc $b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$.

6°) a) D'après les résultats du 5°), on a, pour tout entier naturel n :

$a_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a_n$ donc $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$.

b) Considérons la suite (u_p) définie par $u_p = a_{2p}$.

C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ car $u_{p+1} = a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \frac{1}{6} a_{2p} = \frac{1}{6} u_p$

Pour tout entier naturel p on a $u_p = u_0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^p$ avec $u_0 = a_0 = 1$; donc $u_p = \left(\frac{1}{6}\right)^p$

c'est-à-dire $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$.

Considérons la suite (v_p) définie par $v_p = a_{2p+1}$.

C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ car $v_{p+1} = a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = a_{2p+1+2} = \frac{1}{6} a_{2p+1} = \frac{1}{6} v_p$

Pour tout entier naturel p on a $v_p = v_0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^p$ avec $v_0 = a_1 = 0$; donc $v_p = 0$

c'est-à-dire $a_{2p+1} = 0$.

c) $a_6 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$ donc $a_6 = \frac{1}{216}$.

Pour effectuer 10 000 simulations des six premiers déplacements, il suffit de modifier la boucle

```
POUR j ALLANT_DE 1 A 3
```

en

```
POUR j ALLANT_DE 1 A 6
```

On obtient alors environ 40 à 50 fois sur 10 000 la position A.
Ce qui confirme la valeur trouvée de a_6 puisque

$10\,000 \times \frac{1}{216} \approx 46$