Chapitre 7

LOIS DE PROBABILITÉ À DENSITÉ

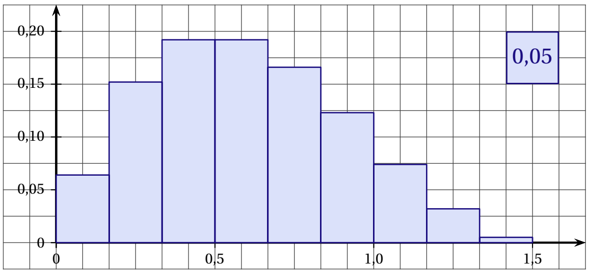
I INTRODUCTION . . . 113
II DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ . . . 114
1 variable aléatoire continue . . . 114
2 fonction de densité . . . 114
3 loi de probabilité . . . 114
4 espérance mathématique . . . 115
5 probabilité conditionnelle . . . 115
III LOI UNIFORME . . . 115
1 définition . . . 115
2 propriété . . . 116
3 espérance mathématique . . . 116
IV LOI NORMALE . . . 117
1 vers une approximation de la loi binomiale . . . 117
2 loi normale centrée réduite . . . 118
3 loi normale . . . 120

I INTRODUCTION

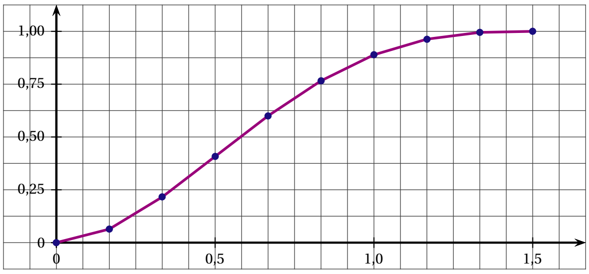
Dans différents domaines on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre théoriquement toute valeur réelle d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ces variables aléatoires sont dites continues.
C'est le cas, par exemple, de la durée du temps d'attente aux consultations d'un hôpital fictif.

Temps d'attente (en minutes)	[0;10[	[10;20[	[20;30[	[30;40[	[40;50[	[50;60[	[60;70[	[70;80[	[80;90]
Fréquences	0,064	0,152	0,192	0,192	0,166	0,123	0,074	0,032	0,005

La série statistique à caractère quantitatif continu est représentée par un histogramme constitué d'une juxtaposition de rectangles dont les aires sont proportionnelles aux fréquences.

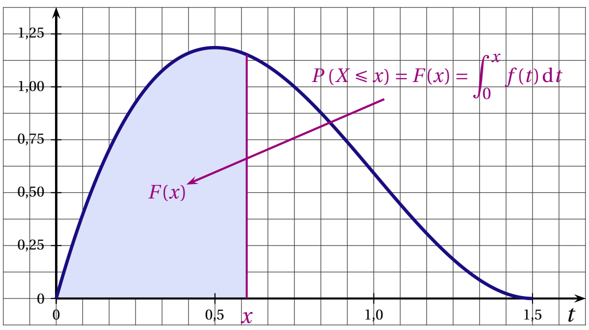


Histogramme

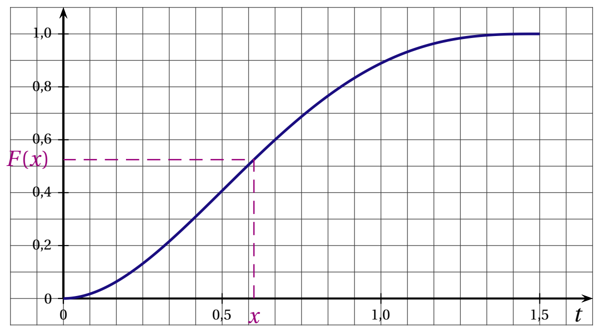


Polygone des fréquences cumulées

On modélise la situation à l'aide d'une variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations de cet hôpital avec $X \in [0;1,5]$.
Pour une telle variable aléatoire, les évènements étudiés sont ceux qui correspondent à des intervalles du type $X \in [0;0,3]$, $0,5 \leqslant X \leqslant 1$ ou $X > 0,5$.
Le calcul de la probabilité $P(X = 0,345)$ que le temps d'attente soit exactement de 20 minutes et 42 secondes n'a pas de sens.
Dans le cas d'une variable aléatoire continue le polygone des fréquences cumulées croissantes est remplacé par la courbe représentative de la fonction de répartition F permettant de calculer des probabilités.
On suppose que la fonction F est définie sur l'intervalle $[0;1,5]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est la fonction définie sur $[0;1,5]$ par $f(t) = \dfrac{64t^3}{27} - \dfrac{64t^2}{9} + \dfrac{16t}{3}$. On dit que f est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X.



Fonction de densité



Fonction de répartition

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1,5]$, $F(x)$ est l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction de densité f, les axes du repère et la droite d'équation $t = x$.
On en déduit que :

— $P(X \leqslant 0,3) = F(0,3) = \displaystyle\int_0^{0,3} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,1808$.

— $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1) = F(1) - F(0,5) = \displaystyle\int_{0,5}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{13}{27}$.

— $P(X > 0,5) = 1 - P(X \leqslant 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \displaystyle\int_0^{0,5} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{16}{27}$.

II DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ

1 VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.

2 FONCTION DE DENSITÉ

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de densité de probabilité sur I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

EXEMPLE

Vérifions que la fonction f définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}$ est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$.

— La fonction f est dérivable sur $[0;1{,}5]$ donc continue.

— Pour tout réel t, $\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}=\dfrac{16t\left(4t^2-12t+9\right)}{27}=\dfrac{16t\,(2t-3)^2}{27}$.
Par conséquent, la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;1{,}5]$.

— Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur sur $[0;1{,}5]$ par $F(t)=\dfrac{16t^4}{27}-\dfrac{64t^3}{27}+\dfrac{8t^2}{3}$ d'où

$$\int_0^{1{,}5} f(t)\,\mathrm{d}t = F(1{,}5)-F(0)=1$$

Ainsi, f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$

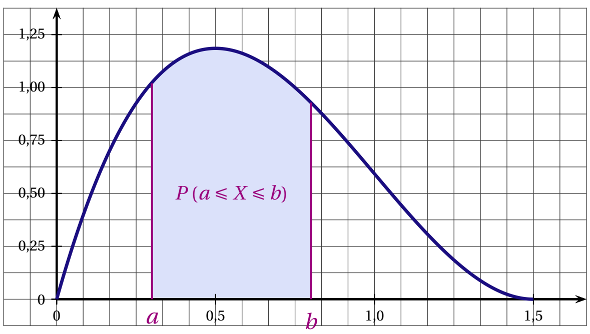
3 LOI DE PROBABILITÉ

Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, la probabilité de l'événement $X\in[a;b]$ est :

$$P(X\in[a;b])=P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

REMARQUE

$P(a\leqslant X\leqslant b)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité étudiée dans l'exemple précédent.



On observe sur cet exemple, que la fonction f prend des valeurs supérieures à 1 sur l'intervalle $[0;1{,}5]$: c'est possible car $f(x)$ n'est pas une probabilité, c'est une densité de probabilité.

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b appartenant à I

1. $P(X=a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$
2. $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X<b)$
3. $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)$

4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X)=\int_a^b t\times f(t)\,\mathrm{d}t$$

EXEMPLE

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations dont la fonction de densité f est définie sur $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\frac{64t^3}{27}-\frac{64t^2}{9}+\frac{16t}{3}$.

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{1,5}\frac{64t^4}{27}-\frac{64t^3}{9}+\frac{16t^2}{3}\,\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{64t^5}{135}-\frac{16t^4}{9}+\frac{16t^3}{9}\right]_0^{1,5}\\&=3{,}6-9+6\\&=0{,}6\end{aligned}$$

Le temps d'attente moyen aux consultations est de 0,6 h soit 36 minutes.

5 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I, J_1 et J_2 deux intervalles de I tel que $P(X\in J_1)\neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement $X\in J_2$ sachant que l'évènement $X\in J_1$ est réalisé est :

$$P_{X\in J_1}(X\in J_2)=\frac{P(X\in J_1\cap J_2)}{P(X\in J_1)}$$

EXEMPLE

Calculons la probabilité que le temps d'attente d'une personne soit inférieur à une heure sachant qu'elle a patienté plus d'une demi-heure.
Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_{X>0,5}(X<1)$. $J_1=]0{,}5;1{,}5]$, $J_2=[0;1[$ et $J_1\cap J_2=]0{,}5;1[$ d'où

$$P_{X>0,5}(X<1)=\frac{P(0{,}5<X<1)}{P(X>0{,}5)}=\frac{\frac{13}{27}}{\frac{16}{27}}=\frac{13}{16}=0{,}8125$$

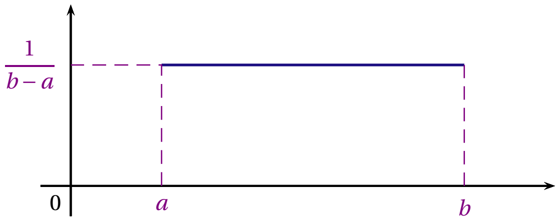
Ainsi, la probabilité que le temps d'attente d'une personne qui a patienté plus d'une demi-heure soit inférieur à une heure est égale à 0,8125.

III LOI UNIFORME

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t)=\frac{1}{b-a}$.

REMARQUE



La fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t)=\dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a;b]$:

— f est continue et positive sur $[a;b]$.

— $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=1.$

2 PROPRIÉTÉ

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, $P(c\leqslant X\leqslant d)=\dfrac{d-c}{b-a}$.

✻ DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}P(c\leqslant X\leqslant d)&=\int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t}{b-a}\right]_c^d\\&=\frac{d}{b-a}-\frac{c}{b-a}=\frac{d-c}{b-a}\end{aligned}$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ est le réel

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

✻ DÉMONSTRATION

Par définition :

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_a^b t\times\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b\\&=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

EXEMPLE

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

Solution

La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$, donc la densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0{,}5;9{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{1}{9{,}5-0{,}5}=\dfrac{1}{9}$.

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$.

1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est $P(X \leqslant 2) = \dfrac{2-0{,}5}{9} = \dfrac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est $P(X \geqslant 3) = \dfrac{9{,}5-3}{9} = \dfrac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T) = \dfrac{0{,}5+9{,}5}{2} = 5$.
   Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

IV LOI NORMALE

1 VERS UNE APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE

RAPPEL

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n;p)$.
L'espérance mathématique est $E(X) = np$; l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

LA FONCTION DE GAUSS

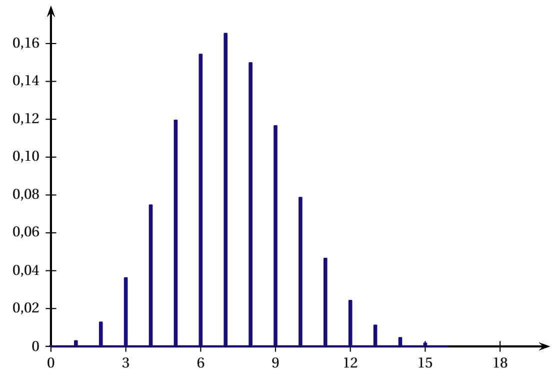
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres n et de même probabilité p.
On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma_n} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
La variable aléatoire Z_n prend les valeurs suivantes :

$$z_k = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0 \leqslant k \leqslant n$$

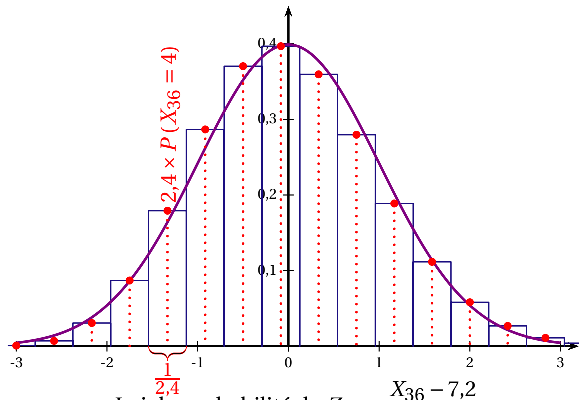
Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n on a :

$$P(Z_n = z_k) = P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P(X_n = k) = p_k$$

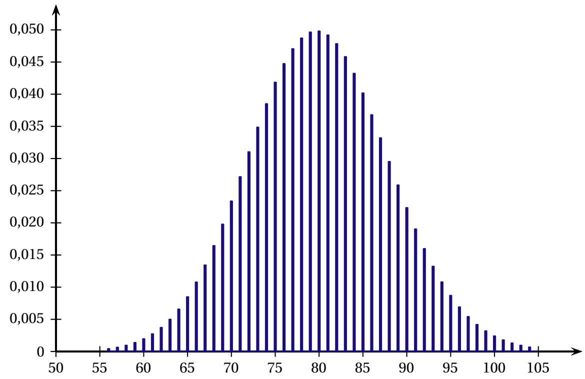
Ainsi, quand X_n prend la valeur k avec la probabilité p_k, alors Z_n prend la valeur $\dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec la même probabilité p_k.
On a représenté graphiquement ci-dessous, pour $X_n \in [E(X_n) - 3\sigma_n ; E(X_n) + 3\sigma_n]$, les lois de probabilité de X_n et de Z_n pour $n = 36$ et $n = 400$ avec $p = 0{,}2$.
La loi de probabilité de Z_n est représentée à l'aide d'un histogramme.
L'aire de chaque rectangle centré sur la valeur z_k est égale à la probabilité $P(Z_n = z_k) = p_k$, il s'ensuit que chaque rectangle a pour dimensions $\sigma_n \times P(X_n = k)$ et $\dfrac{1}{\sigma_n}$.



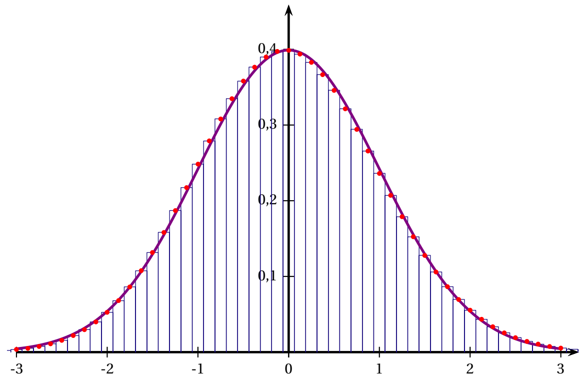
Loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0{,}2$



Loi de probabilité de $Z_{36} = \dfrac{X_{36} - 7{,}2}{2{,}4}$



Loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}2$



Loi de probabilité de $Z_{400} = \dfrac{X_{400} - 80}{8}$

La « courbe en cloche » est la courbe représentative de la fonction de Gauss définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Quand n est de plus en plus grand, les aires des rectangles deviennent de plus en plus proches des aires correspondantes limitées par la courbe représentant la fonction de Gauss :

$$P(a \leqslant Z_n \leqslant b) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

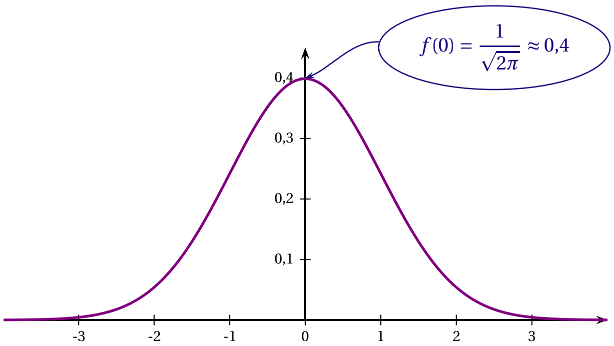
2 LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



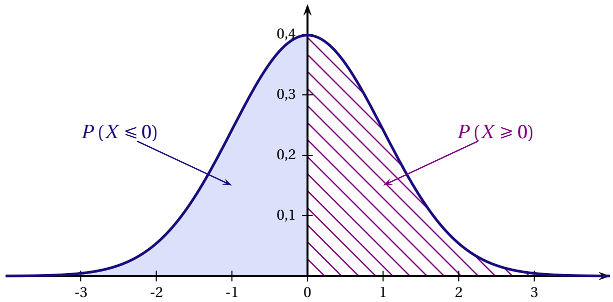
ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

PROPRIÉTÉ

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les mesures des aires égales aux probabilités $P(X \leqslant 0)$ et $P(X \geqslant 0)$ sont égales, d'où $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0)$.
Comme $P(X \leqslant 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$

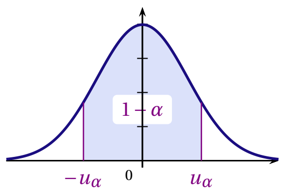


Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a :

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$

INTERVALLE ASSOCIÉ À UNE PROBABILITÉ DONNÉE

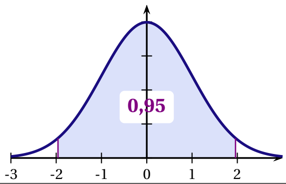
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.



On retient en particulier :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

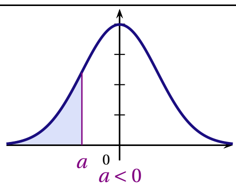
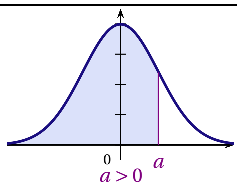
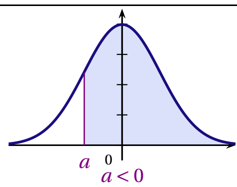
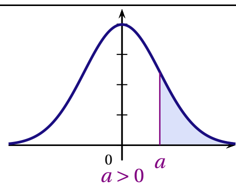
$$P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$$



CALCULS

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ à l'aide de fonctions usuelles.
On peut néanmoins calculer des valeurs approchées des intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$ par des méthodes numériques, disponibles dans les calculatrices et permettant d'obtenir directement des valeurs approchées de certaines probabilités liées à la loi normale.

Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(X \geqslant a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a > 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5 - P(a < X < 0)$	$0{,}5 + P(0 < X \leqslant a)$	$0{,}5 + P(a \leqslant X < 0)$	$0{,}5 - P(0 < X < a)$

3 LOI NORMALE

DÉFINITION

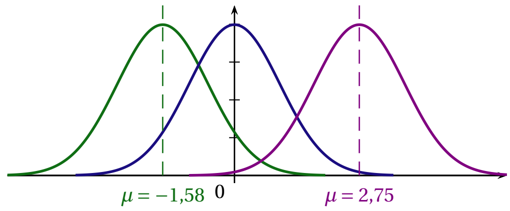
Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.

REMARQUES :

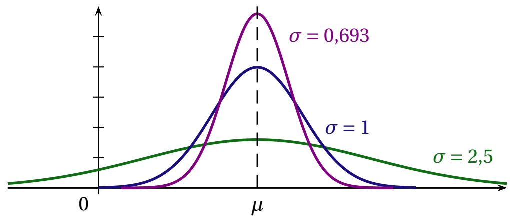
— Si X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors sa variance $V(X)=\sigma^2$.

— La densité associée à une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

— L'espérance μ de la loi normale est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\mu$.



— L'écart-type $\sigma>0$ de la loi normale est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ.



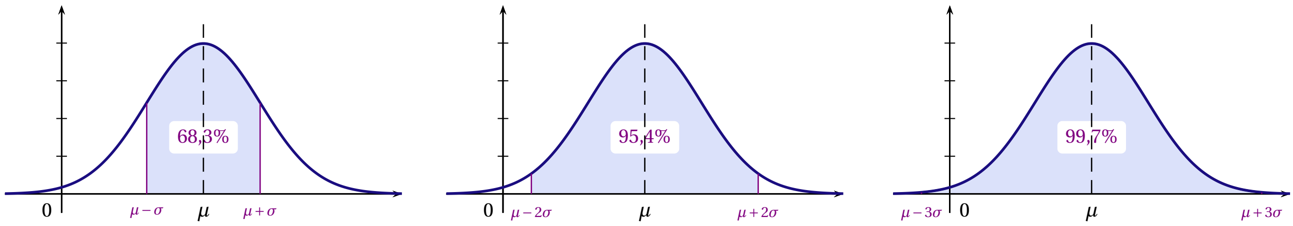
INTERVALLES DE FLUCTUATION D'UNE LOI NORMALE

Si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors :

— $P\left(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma\right)\approx 0{,}683$.

— $P\left(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma\right)\approx 0{,}954$.

— $P\left(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma\right)\approx 0{,}997$.



$X\in\left[\mu-\sigma;\mu+\sigma\right]$ $\qquad$ $X\in\left[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma\right]$ $\qquad$ $X\in\left[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma\right]$

LOI NORMALE ET CALCULATRICES

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. Les calculatrices disposent de commandes permettant de calculer :

1. $P(a\leqslant X\leqslant b)$
2. Le réel k tel que $P(X\leqslant k)=\alpha$ avec $\alpha\in]0;1[$

Commandes spécifiques des calculatrices :

	Sur TI	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a\leqslant X\leqslant b)$	normalFrep(a,b,μ,σ) ou normalCdf(a,b,μ,σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd normCD(a,b,σ,μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X\leqslant k)=\alpha$	FracNormale(α,μ,σ) ou invNorm(α,μ,σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN InvNormCD(α,σ,μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

EXEMPLE

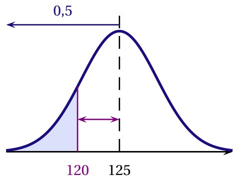
La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125;20{,}25)$ d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(122 \leqslant X \leqslant 128)$; $P(X \leqslant 120)$; $P(X \leqslant 129{,}5)$; $P(X \geqslant 130{,}4)$; $P(X \geqslant 118{,}7)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}871$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = 0{,}02$.
4. Déterminer un intervalle I de centre 125 tel que $P(X \in I) = 0{,}81$.

1. a) À l'aide de la calculatrice on trouve $P(122 \leqslant X \leqslant 128) \approx 0{,}495$.

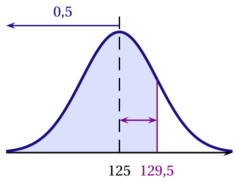
   b)

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 120) &= P(X \leqslant 125) - P(120 < X \leqslant 125) \\ &= 0{,}5 - P(120 < X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}133 \end{aligned}$$



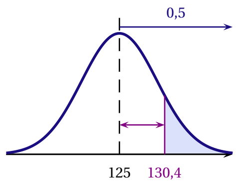
   c)

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 129{,}5) &= P(X \leqslant 125) + P(125 < X \leqslant 129{,}5) \\ &= 0{,}5 + P(125 < X \leqslant 129{,}5) \\ &\approx 0{,}841 \end{aligned}$$



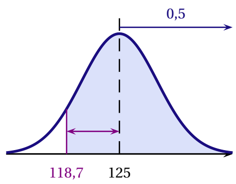
   d)

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 130{,}4) &= P(X \geqslant 125) - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &= 0{,}5 - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &\approx 0{,}115 \end{aligned}$$



   e)

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 118{,}7) &= P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) + P(X > 125) \\ &= 0{,}5 + P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}919 \end{aligned}$$



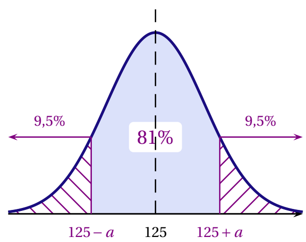
2. Avec la calculatrice, $P(X \leqslant a) = 0{,}871$ pour $a \approx 130{,}09$.
3. La calculatrice permet de résoudre l'équation $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$. Or

$$P(X \geqslant b) = 0{,}02 \iff 1 - P(X < b) = 0{,}02 \iff P(X < b) = 0{,}98$$

   Soit en utilisant la calculatrice $b \approx 134{,}242$.
4. Un intervalle I de centre 125 est de la forme $[125 - a; 125 + a]$ où a est un réel positif.
   On cherche donc le réel a tel que $P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81$.

   La courbe de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}\left(125;4{,}5^2\right)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$.
   On en déduit que :

$$\begin{aligned} P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81 &\iff 1 - 2 \times P(X < 125 - a) = 0{,}81 \\ &\iff P(X < 125 - a) = \frac{1 - 0{,}81}{2} = 0{,}095 \end{aligned}$$

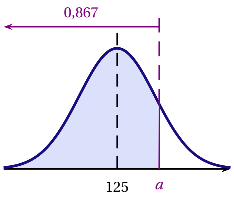
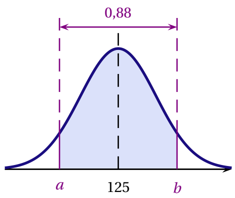
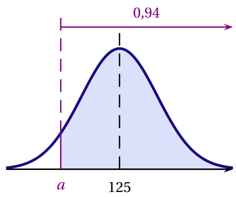


   Soit en utilisant la calculatrice $125 - a \approx 119{,}102$ d'où $a \approx 5{,}898$ et $125 + a \approx 130{,}898$.
   Donc $I = [119{,}102; 130{,}898]$ (ou avec les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-1} près, $I = [119{,}1; 130{,}9]$)

REMARQUE

Trouver l'intervalle associé à une probabilité donnée avec la calculatrice **TI-83** Premium CE (système d'exploitation 5.3)
La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = 4{,}5$

Menu 2nde puis sur la touche distrib var option 3 : invNormale (

$P(X \leqslant a) = 0{,}867$	$P(a \leqslant X \leqslant b) = 0{,}88$	$P(X \geqslant a) = 0{,}94$
		
`invNormale` aire : 0.867 μ : 125 σ : 4.5 Zone : **GAUCH** CTR DROIT	`invNormale` aire : 0.88 μ : 125 σ : 4.5 Zone : GAUCH **CTR** DROIT	`invNormale` aire : 0.94 μ : 125 σ : 4.5 Zone : GAUCH CTR **DROIT**
$a \approx 130$	$a \approx 118$ et $b \approx 132$	$a \approx 118$