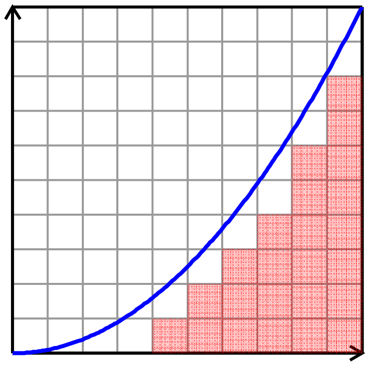
## Exercice 01



Le nombre $n_1$ de petits carreaux se trouvant entièrement au-dessous de la courbe peut être évalué à $n_1 = 24$ .

Le nombre $n_2$ de petits carreaux qui sont traversés par la courbe peut être évalué à $n_2 = 19$ .

On a alors $\left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right) \times 0{,}01 = 33{,}5 \times 0{,}01 = 0{,}335$

On a alors $\int_0^1 x^2\,dx \approx 0{,}335$

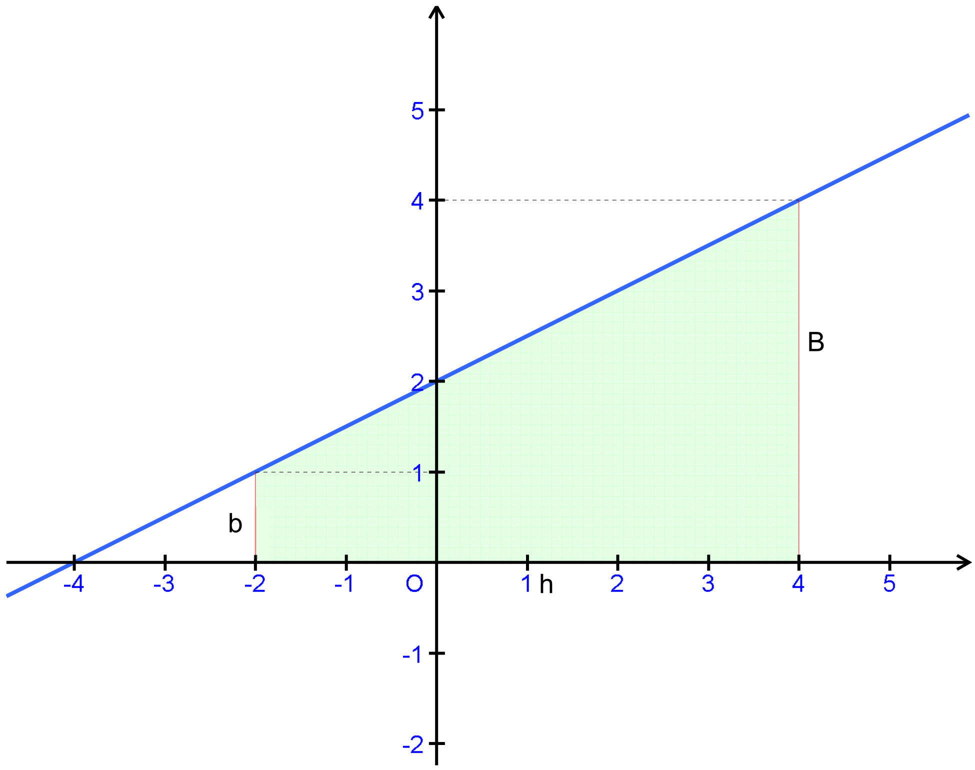
$f$ définie par $f(x) = x^2$ a pour primitive F définie par $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3$ .

On a alors $\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \frac{1}{3} - 0$ donc $\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \frac{1}{3}$ par conséquent $\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) \approx 0{,}333$

## Exercice 02

$f$ est la fonction affine définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

1°) La représentation graphique de $f$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$




$\int_{-2}^{4} f(t)\,dt$ est l'aire, en unités d'aires du trapèze rectangle représenté ci-dessus.

On sait que l'aire d'un trapèze est $\frac{B + b}{2} \times h$

où B et b sont les longueurs des deux bases et h la longueur de la hauteur.

On a $B = 4$ ; $b = 1$ et $h = 4 - (-2) = 6$

Donc $\int_{-2}^{4} f(t)\,dt = \frac{4 + 1}{2} \times 6$ c'est-à-dire $\int_{-2}^{4} f(t)\,dt = 15$ .

2°) $f$ a pour primitive F définie sur IR par $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$

On a alors $F(4) = \frac{1}{4} \times 4^2 + 2 \times 4 = 4 + 8 = 12$ et $F(-2) = \frac{1}{4} \times (-2)^2 + 2 \times (-2) = 1 - 4 = -3$

Donc $F(4) - F(-2) = 12 + 3 = 15$

On a donc $\int_{-2}^{4} f(t) = F(4) - F(-2)$

## Exercice 05

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ell n(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

  Donc $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ \ell n(x)\ \right]_1^4 = \ell n(4) - \ell n(1) = 2\,\ell n(2) - 0$ donc $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = 2\,\ell n(2)$

- La fonction $x \mapsto 3x^3$ a pour primitive $x \mapsto 3 \times \frac{1}{4}x^4$ sur IR.

  Donc $\int_2^{-1} 3x^3\,dx = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_2^{-1} = \frac{3}{4} \times (-1)^4 - \frac{3}{4} \times 2^4 = \frac{3}{4} \times 1 - \frac{3}{4} \times 16 = \frac{3}{4}(1 - 16)$

  donc $\int_2^{-1} 3x^3\,dx = -\frac{45}{4}$

- La fonction $t \mapsto 2t^2 - 1$ a pour primitive $t \mapsto 2 \times \frac{1}{3}t^3 - t$ sur IR.

  Donc $\int_{-1}^{1} (2t^2 - 1)\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - t\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{3} \times 1^3 - 1\right) - \left(\frac{2}{3} \times (-1)^3 - (-1)\right) = \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 2$

  donc $\int_{-1}^{1} (2t^2 - 1)\,dt = -\frac{2}{3}$

- La fonction $t \mapsto 2t - 1 + \frac{1}{t^2}$ a pour primitive $t \mapsto t^2 - t - \frac{1}{t}$ sur $]0\,;+\infty[$

  Donc $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(2t - 1 + \frac{1}{t^2}\right)dt = \left[t^2 - t - \frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left(2^2 - 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 4 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2$

  $= 4 - \frac{1}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4}$

  donc $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(2t - 1 + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{15}{4}$

- On peut écrire $\frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$

  Donc $\int_1^3 \frac{x^2 + x + 1}{x}\,dx = \int_1^3 \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + \ell n(x)\right]_1^3$

  $= \left(\frac{1}{2} \times 3^2 + 3 + \ell n(3)\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1^2 + 1 + \ell n(1)\right) = \frac{9}{2} + 3 + \ell n(3) - \frac{1}{2} - 1 - 0$

  $= \frac{8}{2} + \ell n(3) + 2$

  donc $\int_1^3 \frac{x^2 + x + 1}{x}\,dx = 6 + \ell n(3)$

## Exercice 07

$f$ est définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$ .

1°) On sait que la fonction exponentielle est positive sur IR, donc $e^{\frac{x}{2}} > 0$ pour tout $x \in [0\,;\,2]$
D'autre part si $x \in [0\,;\,2]$ alors $x \geqslant 0$

Donc pour tout $x \in [0\,;\,2]$ on a $x + e^{\frac{x}{2}} > 0$ ; c'est-à-dire $f(x) > 0$.
Par conséquent la fonction $f$ est positive.

2°) On sait que $x \mapsto x$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

D'autre part on peut écrire $e^{\frac{x}{2}} = 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = 2\,u'(x)\,e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{x}{2}$

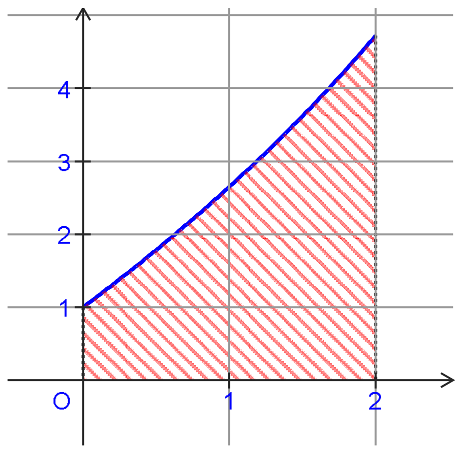
On sait que $u'e^u$ a pour primitive $e^u$ , donc $e^{\frac{x}{2}}$ a pour primitive $2\,e^{\frac{x}{2}}$

On en déduit que $f$ a pour primitive sur $[0\,;\,2]$ la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\,e^{\frac{x}{2}}$

3°) $f$ étant positive, l'aire hachurée sur le dessin est donnée par :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_0^2 = \frac{1}{2} \times 2^2 + 2\,e^{\frac{2}{2}} - (0 + 2e^0) = 2 + 2e - 2 = 2e$$

L'aire hachurée sur le dessin est donc égale à $2e$ unités d'aire.
On a $2e \approx 5{,}44$



**Exercice 09**

1°) F est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ell n(x) - x$

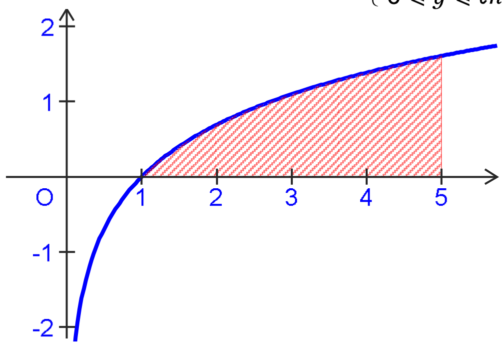
F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a

$F'(x) = 1 \times \ell n(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ell n(x) + 1 - 1 = \ell n(x) = f(x)$

Donc F est une primitive de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.

2°) a) On hachure sur le dessin la portion du plan $\mathscr{A}$

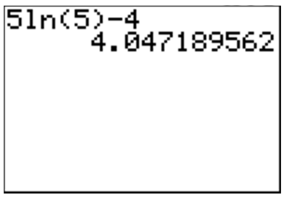
correspondant à l'ensemble des points M($x$ ; $y$) tels que $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 \leqslant y \leqslant \ell n(x) \end{cases}$




b) La fonction $\ell n$ étant positive sur $[1\,;\,5]$, par définition l'aire de $\mathscr{A}$ est donnée par $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$

Donc $I = \Big[\,F(x)\,\Big]_1^5 = \Big[\,x\ell n(x) - x\,\Big]_1^5 = 5\ell n(5) - 5 - \Big(\,1\ell n(1) - 1\,\Big) = 5\ell n(5) - 5 + 1$

Donc l'aire de $\mathscr{A}$ est égale à $5\ell n(5) - 4$ unités d'aire, soit environ 4,05 unités d'aire.



## Exercice 10

1°) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ell n(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ .

Donc $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ \ell n(x)\ \Big]_1^e = \ell n(e) - \ell n(1) = 1 - 0$ donc $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$ .

2°) a) La fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \ell n(x+1)$ est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$

Elle est de la forme $\ell n(u)$ avec $u(x) = x + 1$, donc sa dérivée est de la forme $\frac{u'}{u}$

On a donc $\mathrm{F}'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x+1}$

Donc F définie par $\mathrm{F}(x) = \ell n(x+1)$ est une primitive sur $]-1 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

b) $\int_1^e \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ \ell n(x+1)\Big]_1^e = \ell n(e+1) - \ell n(1+1)$ donc $\int_1^e \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ell n(e+1) - \ell n(2)$

3°) Pour tout $x > 0$ on a : $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

Donc $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ pour tout $x > 0$ .

4°) D'après la question précédente on peut écrire : $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

Donc $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^e \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = 1 - [\ell n(e+1) - \ell n(2)]$

Donc $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = 1 - \ell n(e+1) + \ell n(2)$ .

## Exercice 12

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$

1°) On sait que la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$

Donc pour tout $x \in [-1\,;\,0]$ on a $e^{x^2} \geqslant 0$

Comme $-1 \leqslant 0$ on en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^{x^2}\,dx \geqslant 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \geqslant 0$.

2°) On sait que pour $x \in [-1\,;\,1]$ on a $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors : $e^0 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^1$

c'est-à-dire : $1 \leqslant e^{x^2} \leqslant e$

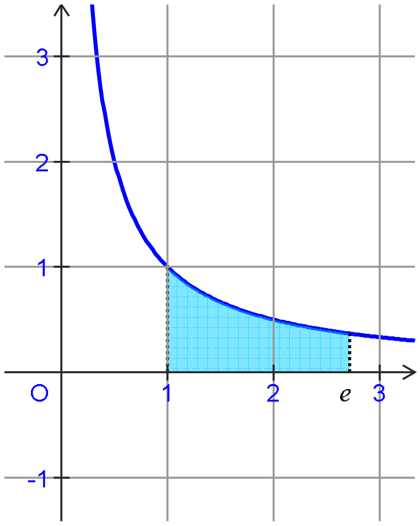
Comme $-1 \leqslant 1$ on en déduit que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\,dx \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leqslant \int_{-1}^{1} e\,dx$

On a $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\,dx = \Big[\,x\,\Big]_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

et $\displaystyle\int_{-1}^{1} e\,dx = \Big[\,e \times x\,\Big]_{-1}^{1} = e \times 1 - e \times (-1) = e + e = 2e$

On en déduit que $2 \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leqslant 2e$

**Exercice 16**



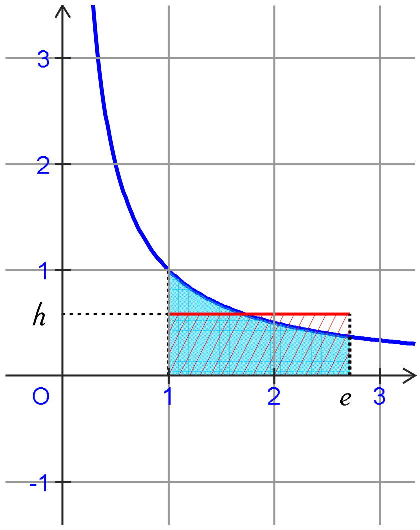

$f$ est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$A = \int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ \ell n(x)\ \Big]_1^e = \ell n(e) - \ell n(1) = 1 - 0$$

donc $\quad A = 1$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est positive sur $[1\,;e]$.

Donc : A représente l'aire comprise entre la courbe de $f$, l'axe O$x$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ .




Le rectangle de hauteur $h$ limité par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ et l'axe O$x$ a pour aire
$(e - 1) \times h$

Cette aire est égale à A si :
$(e - 1) \times h = 1$ $\quad$ c'est-à-dire $\quad h = \dfrac{1}{e - 1}$

La valeur moyenne de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1\,;e]$ est donc $\dfrac{1}{e - 1}$

## Exercice 18

1°) $f$ est définie par $f(x) = 3\,\ell n(x^2 - 2x + 3)$

On sait que la fonction logarithme népérien est définie sur $]0\,;+\infty[$.

Donc $f$ est définie à condition que $x^2 - 2x + 3$ soit strictement positif.

Le trinôme du second degré $x^2 - 2x + 3$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$

$\Delta < 0$ , donc d'après la règle du signe du trinôme, on a $x^2 - 2x + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) On sait que $(\ell n\, u)' = \dfrac{u'}{u}$ .

Donc $f'(x) = 3 \times \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3}$ donc $f'(x) = \dfrac{6(x-1)}{x^2 - 2x + 3}$

On a vu que $x^2 - 2x + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

On a donc :

$f'(x) < 0$ si $x \in ]-\infty\,;1[$ ; $f'(x) > 0$ si $x \in ]1\,;+\infty[$ et $f'(x) = 0$ si $x = 1$ .

3°) On en déduit le tableau de variations de $f$ sur $[0\,;3]$ :

$f(0) = 3\,\ell n(0^2 - 2 \times 0 + 3) = 3\,\ell n(3)$

$f(1) = 3\,\ell n(1^2 - 2 \times 1 + 3) = 3\,\ell n(2)$

$f(3) = 3\,\ell n(3^2 - 2 \times 3 + 3) = 3\,\ell n(6) = 3\,\ell n(2) + 3\,\ell n(3)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $3\ell n(3)$ | $\searrow$ | $3\ell n(2)$ | $\nearrow$ | $3\ell n(6)$ |

4°) En utilisant le tableau de variations de $f$, et en remarquant que $3\,\ell n(6) > 3\,\ell n(3)$, on peut en déduire que lorsque $x \in [0\,;3]$, on a $3\,\ell n(2) \leqslant f(x) \leqslant 3\,\ell n(6)$

Comme $0 < 3$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^3 3\,\ell n(2)\,dx \leqslant \int_0^3 f(x)\,dx \leqslant \int_0^3 3\,\ell n(6)\,dx$

Donc $\displaystyle 3\,\ell n(2) \times \int_0^3 1\,dx \leqslant \int_0^3 f(x)\,dx \leqslant 3\,\ell n(6) \times \int_0^3 1\,dx$

On sait que : $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[\,x\,\Big]_0^3 = 3 - 0 = 3$

Donc $\displaystyle 3 \times 3\,\ell n(2) \leqslant \int_0^3 f(x)\,dx \leqslant 3 \times 3\,\ell n(6)$

Donc $\displaystyle 9\,\ell n(2) \leqslant \int_0^3 f(x)\,dx \leqslant 9\,\ell n(6)$

5°) La valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;3]$ est : $\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx$ .

D'après la question précédente, on a $\displaystyle\frac{1}{3} \times 9\,\ell n(2) \leqslant \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{3} \times 9\,\ell n(6)$

c'est-à-dire $\displaystyle 3\,\ell n(2) \leqslant \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx \leqslant 3\,\ell n(6)$

On a $3\,\ell n(2) \approx 2{,}08$ et $3\,\ell n(6) \approx 5{,}38$

On en déduit que $\displaystyle 2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx \leqslant 6$

La valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;3]$ est comprise entre 2 et 6 .

## Exercice 19

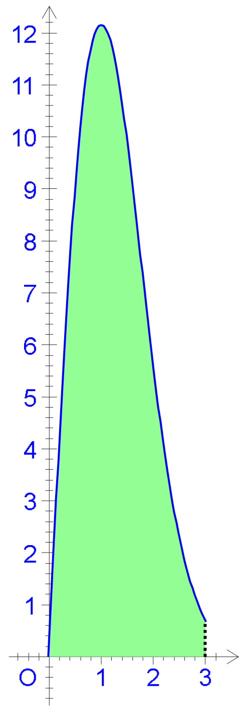
1°) $f$ est définie par $f(t) = 20t\,exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$. On peut écrire $f(t) = -20 \times (-t)\,exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$

Donc $f(t)$ est de la forme $-20\,u'(t)\,exp\,(u(t))$ avec $u(t) = -\dfrac{t^2}{2}$ et donc $u'(t) = -\dfrac{2t}{2} = -t$

On sait qu'une fonction de la forme $u'\,e^u$ a pour primitive $e^u$.

Donc $f$ a pour primitive la fonction F définie par $F(t) = -20\,exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$

2°) Sur l'intervalle $[0\,;3]$ la fonction $f$ est positive, donc l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $C_f$ et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 3$, exprimée en unités d'aire, est donnée par :




$$A = \int_0^3 f(t)\,dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_0^3 = \left[\ -20\,exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)\ \right]_0^3$$

$$= -20\,exp\left(-\dfrac{3^2}{2}\right) - \left(-20\,exp\left(-\dfrac{0^2}{2}\right)\right)$$

$$= -20\,exp\left(-\dfrac{9}{2}\right) + 20\,e^0$$

Donc $A = 20 - 20\,e^{-\frac{9}{2}}$ u.a ; $A \approx 19{,}78$ u.a

3°) La valeur moyenne de $f$ sur $[0\,;3]$ est : $m = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$

Donc $m = \dfrac{20 - 20\,e^{-\frac{9}{2}}}{3}$ ; $m \approx 6{,}5926$

4°) D'après la question précédente, le flux financier a une vitesse $m \approx 6{,}5926$ milliers d'euros par minute sur l'intervalle $[0\,;3]$.
Donc, à la fin des trois minutes, la somme transférée est égale à :

$3m = 20 - 20\,e^{-\frac{9}{2}}$ ce qui donne $3m \approx 19{,}778$ (en milliers d'euros)

À la fin des trois minutes, la somme transférée est d'environ 19 778 euros.

## Exercice 20

1°) a) F est définie sur IR par $F(x) = 10\,\ell n\,(e^x + 4)$

On sait que $(\ell n\, u)' = \dfrac{u'}{u}$

Donc $F'(x) = 10 \times \dfrac{e^x}{e^x + 4} = \dfrac{10\,e^x}{e^x + 4} = C'(x)$

On en déduit que F est une primitive de C′ sur IR.

b) Sachant que C est aussi une primitive de C′ sur IR, et que deux primitives de la même fonction sont égales à une constante près, on peut écrire

$C(x) = F(x) + k$ avec $k \in$ IR

En particulier on a $C(0) = F(0) + k$ et comme on sait que $C(0) = 0$ on obtient

$k = -F(0) = -10\,\ell n\,(e^0 + 4) = -10\,\ell n\,(5)$

On obtient donc $C(x) = F(x) - 10\,\ell n\,(5)$ c'est-à-dire $C(x) = 10\,\ell n\,(e^x + 4) - 10\,\ell n\,(5)$

c) Le coût total, en milliers d'euros, de 5 tonnes de produit est : $C(5) = 10\,\ell n\,(e^5 + 4) - 10\,\ell n(5)$

On a $10\,\ell n\,(e^5 + 4) - 10\,\ell n(5) \approx 34{,}17$

Le coût total de 5 tonnes de produit est environ 34170 euros .

2°) a) Le coût marginal est C′, donc la valeur moyenne du coût marginal sur l'intervalle $[0\,;\,x]$ est :

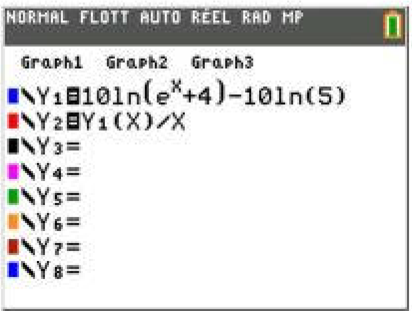
$$\frac{1}{x-0}\int_0^x C'(t)\,dt = \frac{1}{x}\Big[\,C(t)\,\Big]_0^x = \frac{1}{x}\big[C(x) - C(0)\big] = \frac{1}{x}\,C(x) = \frac{C(x)}{x}$$

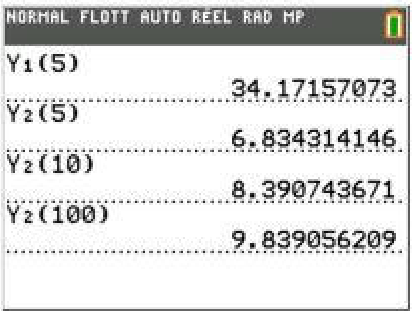
Donc : La valeur moyenne de la fonction coût marginal sur l'intervalle $[0\,;\,x]$ est $\dfrac{C(x)}{x} = C_M(x)$ .

b) On a : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{10\,\ell n\,(e^x + 4) - 10\,\ell n(5)}{x}$ .

c) En utilisant une calculatrice, on obtient :

$C_M(5) \approx 6{,}83$ ; $C_M(10) \approx 8{,}39$ ; $C_M(100) \approx 9{,}84$



## Exercice 21

### Partie 1

1°) $f(x) = g(x) \iff \dfrac{10}{1+x} - 1 = \dfrac{x}{2} \iff \dfrac{10-1-x}{1+x} = \dfrac{x}{2} \iff \dfrac{9-x}{1+x} = \dfrac{x}{2} \iff 2(9-x) = x(1+x)$

$\iff 18 - 2x = x + x^2 \iff 0 = x + x^2 - 18 + 2x \iff 0 = x^2 + 3x - 18$

Le trinôme du second degré $x^2 + 3x - 18$ a pour discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 9 + 72 = 81$

$\Delta$ est positif, donc ce trinôme a deux racines qui sont :

$x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{81}}{2 \times 1} = \dfrac{-3-9}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{81}}{2 \times 1} = \dfrac{-3+9}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

Les fonctions $f$ et $g$ étant définies sur l'intervalle $[0 ; 9]$, on en déduit que :

L'équation $f(x) = g(x)$ a pour solution 3.

2°) a) F est définie sur $[0 ; 9]$ par $F(x) = 10\,\ell n(1+x) - x$.

On sait que $\ell n(u)$ a pour dérivée $\dfrac{u'}{u}$ En prenant $u(x) = 1 + x$ on a $u'(x) = 1$

Par conséquent $F'(x) = 10 \times \dfrac{1}{1+x} - 1$ c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$. Donc F est une primitive de $f$.

b) $I = \displaystyle\int_3^9 f(x)\,dx = \Big[ F(x) \Big]_3^9 = \Big[ 10\,\ell n(1+x) - x \Big]_3^9 = [\,10\,\ell n(1+9) - 9\,] - [\,10\,\ell n(1+3) - 3\,]$

$= 10\,\ell n(10) - 9 - 10\,\ell n(4) + 3 = 10\,(\,\ell n(10) - \ell n(4)\,) - 6 = 10\,\ell n\left(\dfrac{10}{4}\right) - 6 = 10\,\ell n\left(\dfrac{5}{2}\right) - 6$

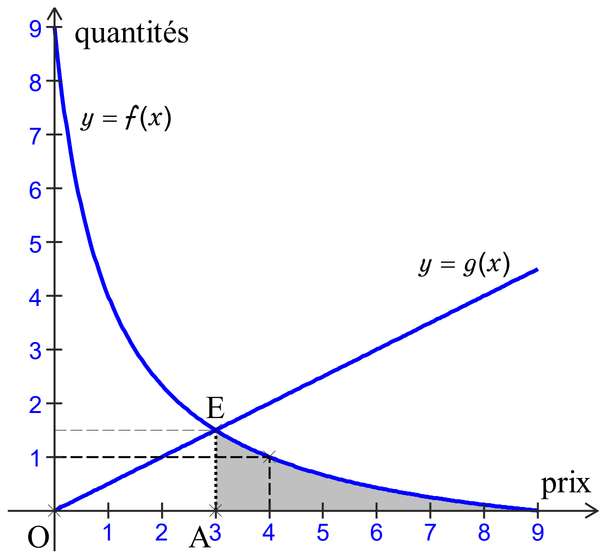
Donc $I = 10\,\ell n(5) - 10\,\ell n(2) - 6$ on a $I \approx 3{,}163$

### Partie 2

1°) a) On observe graphiquement que le point de la courbe de $f$ ayant pour abscisse 4 a pour ordonnée 1.
On en déduit que si le prix de vente est de 40 € la boîte, environ 100 boîtes seront achetées.

On a $f(4) = \dfrac{10}{1+4} - 1 = \dfrac{10}{5} - 1 = 2 - 1 = 1$

Si le prix de vente est de 40 € la boîte,
100 boîtes seront achetées.




b) On observe graphiquement que le point E d'intersection des deux courbes a pour abscisse 3.
On en déduit que le prix d'équilibre est de 30 € .
L'ordonnée de ce point est 1,5 .
Le nombre de boîtes correspondant est donc de 150.
D'après la partie 1, l'équation $f(x) = g(x)$ a pour solution 3.
On en déduit que : le prix d'équilibre est de 30 € .

On a $g(3) = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ (et $f(3) = 1{,}5$)

Donc le prix d'équilibre correspond à une offre et une demande de 150 boîtes.

2°) a) Le triangle OAE est un triangle rectangle en A.
Son aire est donnée, en unités d'aires, par :

$\dfrac{OA \times AE}{2} = \dfrac{3 \times 1{,}5}{2} = 2{,}25$

Donc le surplus des producteurs est de 2250 € .

b) $f$ étant un fonction positive, l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3 \leqslant x \leqslant 9$) est donnée, en unités d'aires, par : $I = \displaystyle\int_3^9 f(x)\,dx$

On sait d'après la partie 1 que $I = \displaystyle\int_3^9 f(x)\,dx = 10\,\ell n(5) - 10\,\ell n(2) - 6$ avec $I \approx 3{,}163$

Donc le surplus des consommateurs est de 3163 € .