Chapitre 5

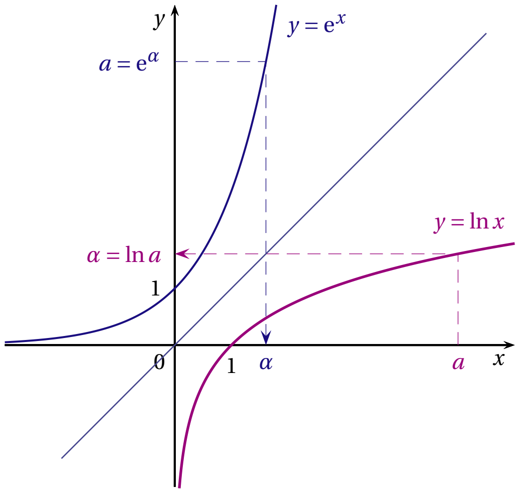
FONCTION LOGARITHME

I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x, $e^x \in]0;+\infty[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel α tel que $e^{\alpha} = a$

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $e^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = e^y$$

REMARQUES

— On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
— $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
— $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

2 CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

1. Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
3. Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

✳ DÉMONSTRATION

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff e^y = x$. Soit $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $e^x = y \iff x = \ln(y) = \ln(e^x)$. Soit $\ln(e^x) = x$.

EXEMPLES

$e^{\ln 5} = 5$; $\quad e^{-\ln 0,1} = \dfrac{1}{e^{\ln 0,1}} = \dfrac{1}{0,1} = 10$; $\quad \ln\left(\sqrt{e}\right) = \ln\left(e^{0,5}\right) = 0,5$; $\quad \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln\left(e^{-1}\right) = -1$.

3 VARIATION

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$.
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a=\mathrm{e}^{\ln a}$ et $b=\mathrm{e}^{\ln b}$. Ainsi, $\mathrm{e}^{\ln a}<\mathrm{e}^{\ln b}$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on en déduit que $\ln a<\ln b$.

CONSÉQUENCES

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a=\ln b$ si, et seulement si, $a=b$

$\ln a>\ln b$ si, et seulement si, $a>b$

EXEMPLE

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-2x$.
La fonction f est dérivable et pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^x-2$.
On a donc : $f'(x)=0 \iff \mathrm{e}^x-2=0 \iff \mathrm{e}^x=2 \iff x=\ln 2$.
On a également $f'(x)<0 \iff \mathrm{e}^x<2 \iff x<\ln 2$.
Les variations de f se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$	

II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$$

DÉMONSTRATION

Soient $a>0$ et $b>0$ deux réels strictement positifs,
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a=\mathrm{e}^{\ln a}$, $b=\mathrm{e}^{\ln b}$ et $a\times b=\mathrm{e}^{\ln(a\times b)}$
D'autre part,

$$a\times b=\mathrm{e}^{\ln a}\times\mathrm{e}^{\ln b}=\mathrm{e}^{\ln a+\ln b}$$

D'où

$$\mathrm{e}^{\ln(a\times b)}=\mathrm{e}^{\ln a+\ln b}$$

Donc $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$.

REMARQUE

John Napier publia en 1614 une méthode de calcul transformant les multiplications en additions : les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre).

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a$

DÉMONSTRATIONS

1. Soit $a > 0$ alors $\dfrac{1}{a} > 0$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc
$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0 \iff \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$
3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,
$$\mathrm{e}^{\ln\left(a^n\right)} = a^n \text{ et } \mathrm{e}^{n\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = a^n$$
Donc $\mathrm{e}^{\ln\left(a^n\right)} = \mathrm{e}^{n\ln a}$ et par conséquent, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.
4. Soit $a > 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc
$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$$

III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 DÉRIVÉE

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

— **On admet** que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

— Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.
Or pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x$ d'où $f'(x) = 1$
Ainsi pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) \times x = 1$ donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2 VARIATION

La fonction ln est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$.

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Comme $\ln 1 = 0$, on en déduit les propriétés suivantes :

Pour tout réel x strictement positif :

$\ln x = 0$ si, et seulement si, $x = 1$

$\ln x > 0$ si, et seulement si, $x > 1$

$\ln x < 0$ si, et seulement si, $0 < x < 1$

D'où le tableau de variation de la fonction ln :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	

CONSÉQUENCE

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \in \mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

Pour tout réel k, l'équation $\ln x = k$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution $x = \mathrm{e}^k$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

Notons $\mathscr{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.

— $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(\mathrm{e};1)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$.

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1) = 1$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$.

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(\mathrm{e};1)$ est $\ln'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(\mathrm{e};1)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1 \iff y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$$

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

— Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante.
Par conséquent, la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.